

MT-08
COMPLEX ANALYSIS
समिश्र विश्लेषण

Bachelor of Science (BA/BSC-12/16)

Third Year, Examination-2020

Time Allowed : 2 Hours

Maximum Marks : 40

Note: This paper is of Forty (40) marks divided into Two (02) sections A and B. Attempt the question contained in these sections according to the detailed instructions given therein.

नोट: यह प्रश्न पत्र चालीस (40) अंकों का है। जो दो (02) खण्डों क तथा ख में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों को हल कीजिए।

Section-A/खण्ड-‘क’

(Long Answer Type Questions/दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

Note: Section-'A' contains Five (05) long answer type questions of Ten (10) marks each. Learners are required to answer any two (02) questions only. (2×10=20)

नोट: खण्ड-‘क’ में पाँच (05) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिए गए हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए दस (10) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. If $u + v = \frac{2\sin 2x}{e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x}$

and $f(z) = u + iv$ is an analytic function then find $f(z)$ in terms of z .

यदि $u + v = \frac{2\sin 2x}{e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x}$

तथा $f(z) = u + iv$ एक विश्लेषिक फलन हो तो $f(z)$ को z के पदों में ज्ञात कीजिए।

2. Show that generally a bilinear transformation can be expressed as the sum of the transformation of the form $w = z + \alpha$, $w = \beta z$, $w = \frac{1}{z}$. Symbols have their usual meaning.

दर्शाइये कि सामान्यतया एक द्विरैखिक रूपान्तरण को $w = z + \alpha$, $w = \beta z$, $w = \frac{1}{z}$ प्रकार के रूपान्तरणों के योग में व्यक्त किया जा सकता है, संकेतों का वास्तविक अर्थ लिया गया है।

3. Prove that the one triangle whose vertices are the points z_1, z_2, z_3 , on the complex plane is equilateral

if:
$$\frac{1}{z_2 - z_3} + \frac{1}{z_3 - z_1} + \frac{1}{z_1 - z_2} = 0.$$

सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज जिसके शीर्ष बिन्दु सम्मिश्र तल पर स्थित बिन्दु z_1, z_2, z_3 हों, एक समबाहु त्रिभुज होगा यदि :
$$\frac{1}{z_2 - z_3} + \frac{1}{z_3 - z_1} + \frac{1}{z_1 - z_2} = 0.$$

4. State and prove Cauchy integral theorem.

कोशी का समाकलन प्रमेय का कथन लिखिए व सिद्ध कीजिए।

5. State and prove Maximum modulus theorem.

महत्तम मापांक प्रमेय का कथन लिखिए व सिद्ध कीजिए।

Section-B/खण्ड-ख

(Short answer type questions/ लघु उत्तरीय प्रश्न)

Note: Section-B Contains Eight (08) short Answer type questions of Five (05) marks each. Learners are required to answer any four (04) questions only. (4×5=20)

नोट: खण्ड-‘ख’ में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिए गए हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए पाँच (05) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Find the locus of Z , if

$$\left| \frac{z-i}{z+i} \right| \geq 2.$$

Z का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए, जबकि

$$\left| \frac{z-i}{z+i} \right| \geq 2.$$

2. Show that the sequence $\langle \frac{i^n}{n} \rangle$ converges to 0.

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\langle \frac{i^n}{n} \rangle$, 0 पर अभिसृत होता है।

3. Show that $f(z) = z^2$ is Continuous in the range $|z| \leq 1$.

सिद्ध कीजिए कि $f(z) = z^2$ प्रांत $|z| \leq 1$ में सतत् है।

4. Show that $u = e^{-x} (x \sin y - y \cos y)$

is harmonic function

सिद्ध कीजिए $u = e^{-x} (x \sin y - y \cos y)$ प्रसंवादी फलन है।

5. Find the radius of convergence of power series

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3+4i)^n z^n$$

घात श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} (3+4i)^n z^n$ की अभिसरण त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

6. Find the fixed point of bilinear transformation

$$w = \frac{3z-4}{z-1} \text{ and write it in general form}$$

दिरैखिक रूपान्तरण $w = \frac{3z-4}{z-1}$ के स्थिर बिन्दु ज्ञात कीजिए तथा इसे सामान्य रूप में लिखिए।

7. Using Cauchy's integral formula evaluate :

$$\int_C \frac{dz}{z(z+\pi i)}$$

Where C is $|z+3i|=1$

$$\text{समाकलन : } \int_C \frac{dz}{z(z+\pi i)}$$

जहाँ C $|z+3i|=1$ है, का मान कोशी समाकलन सूत्र का प्रयोग करके ज्ञात कीजिए।

8. Find poles of $f(z)$ given by :

$$f(z) = \sec \frac{1}{z}$$

फलन $f(z)$ के ध्रुवों का मान ज्ञात कीजिए :

$$f(z) = \sec \frac{1}{z}$$
