 Roll No................

MT-07
ALGEBRA
बीजगणित

Bachelor of Science (BA/BSc.-12/16)

Third Year, Examination-2020

Time Allowed : 2 Hours Maximum Marks : 40

Note: This paper is of Forty (40) marks divided into Two (02) sections A and B. Attempt the question contained in these sections according to the detailed instructions given therein.

नोटः यह प्रश्न पत्र चालीस (40) अंकों का है। जो दो (02) खण्डों क तथा ख में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों को हल कीजिए।

Section-A/खण्ड–'क'

(Long Answer type Questions/दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

Note: Section-'A' contains Five (05) long answer type questions of Ten (10) marks each. Learners are required to answer any two (02) questions only. (2×10=20)

नोट: खण्ड–'क' में पाँच (05) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिए गए हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए दस (10) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. If H and K are two subgroups of a group G then HK will be a subgroup of G iff HK = KH.

   यदि H तथा K किसी समूह G के कोई दो उपसमूह हो तो HK, G का उपसमूह होगा यदि और केवल यदि HK=KH.

2. Define order of an element of a group. If a and b are any two elements of a group G, then prove that $o(b^{-1}ab) = o(a)$.

   समूह के किसी अवयव की कोटि की परिभाषा दीजिए। यदि a तथा b समूह G के कोई दो स्वेच्छ अवयव हैं तो सिद्ध कीजिए कि $o(b^{-1}ab) = o(a)$.

3. If I_1 and I_2 are ideals of R then

   $$I_1 + I_2 = \{x_1 + x_2 : x_1 \in I_1, x_2 \in I_2\}$$

   is also an ideal of R containing I_1 and I_2.

माना I_1 एवं I_2 वलय R की गुणजाव लिया है तब

$I_1 + I_2 = \{x_1 + x_2 : x_1 \in I_1, x_2 \in I_2\}$

वलय R की गुणजावली होती है तथा $I_1 + I_2$ में I_1 एवं I_2 दोनों समाहित होते हैं।

4. Show that a finite dimensional vector space has a finite basis.

दिखाइए कि किसी नियत आकार की सदिश समष्टि का एक नियत आधार होता है।

5. If $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ then find the following :

(a) A^{-1} (b) A^2

(c) A^3 (d) Order of A

यदि $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ तो निम्न को ज्ञात कीजिये।

(a) A^{-1} (b) A^2

(c) A^3 (d) A की कोटि

Section-B/खण्ड–ख

(Short answer type a question / लघु उत्तरीय प्रश्न)

Note: Section-B Contains Eight (08) short answer type questions of Five (05) marks each. Learners are required to answer any four (04) questions only. (4×5=20)

नोटः खण्ड–'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिए गए हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए पाँच (05) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Show that the set G={1, 2, ____ P-1} for Xp (multiplication modulo P), is an abelian group when P is prime number.

   सिद्ध कीजिये कि समुच्चय G={1, 2, ____ P-1} for Xp (माड्यूलो गुणा P)संक्रिया के लिये आबेली समूह होगा जहाँ P अभाज्य संख्या है।

2. Show that in a finite cyclic group order of the group is equal to the order of its generator.

   सिद्ध कीजिये कि एक परिमित चक्रीय समूह की कोटि उसके जनक की कोटि के बराबर होती है।

3. If H is a subgroup of G, and $g \in G$, then prove that $o(H) = o(gHg^{-1})$.

   यदि H किसी समूह G का एक उपसमूह हो तथा $g \in G$ तो सिद्ध कीजिए कि $o(H) = o(gHg^{-1})$.

4. Show that center Z of a group G is normal subgroup of G.

समूह G का केन्द्र Z, G का प्रसामान्य उपसमूह होगा।

5. If $(R, +, \bullet)$ is a ring and $a \in R$ then

$S = \{x \in R : ax = 0\}$ is subring of R.

यदि $(R, +, \bullet)$ एक वलय है तथा $a \in R$ तब सिद्ध कीजिए कि S, R का उपवलय है जहाँ $S = \{x \in R : ax = 0\}$.

6. Show that the intersection of subspaces of a vector space is also a subspace.

किसी सदिश समष्टि के किन्हीं दो उपसमष्टियों का सर्वनिष्ठ भी उस सदिश समष्टि की उपसमष्टि होती है।

7. Show that the set P_3 of all permutation on three symbols 1, 2, 3 is a finite non-abelian group of order 6 with respect to permutation multiplication as composition.

दिखाइए कि 1, 2, 3 के क्रमचय समूह का समुच्चय P_3 क्रमचय गुणन के लिए 6 क्रम का नियत आबेली समूह होगा।

8. Show that non-zero finite integral domain is field.

दिखाइए की अशून्य नियत पूर्णांकीय प्रान्त एक क्षेत्र होता है।

*****