

# MT-08

## Complex Analysis

### समिश्र विश्लेषण

Bachelor of Science (BSC-12/16)

Third Year, Examination, 2019 (June)

**Time : 3 Hours]**

**Max. Marks : 40**

**Note :** This paper is of Forty (40) marks divided into three (03) sections A, B and C. Attempt the questions contained in these sections according to the detailed instructions given therein.

**नोट :** यह प्रश्नपत्र चालीस (40) अंकों का है जो तीन (03) खण्डों क, ख तथा ग में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों को हल करना है।

### SECTION-A/( खण्ड-क )

(Long Answer Type Questions)/( दीर्घ उत्तरों वाले प्रश्न )

**Note :** Section 'A' contains four (04) long answer type questions of Nine and half (9½) marks each. Learners are required to answer any two (2) questions only.

(2×9½=19)

**नोट :** खण्ड 'क' में चार (04) दीर्घ उत्तरों वाले प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए साढ़े नौ (9½) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Find the equation of a circle which passes through three points  $z_1, z_2$  and  $z_3$ .

उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो तीन बिन्दुओं  $z_1, z_2$  तथा  $z_3$  से होकर गुजरता हो।

2. Show that the function  $f(z) = e^{-z^{-4}}$  ( $z \neq 0$  and  $f(0) = 0$ ) is not analytic at  $z = 0$ , although C-R equations are satisfied there.

दर्शाइए कि फलन  $f(z) = e^{-z^{-4}}$  ( $z \neq 0$  तथा  $f(0) = 0$ )  $z = 0$  पर विश्लेषिक नहीं है, यद्यपि वहां पर कोशी रीमान समीकरण संतुष्ट होते हैं।

3. Find the condition that the transformation  $w = \frac{az + b}{cz + d}$

transforms the unit circle in the  $w$ -plane into straight line in the  $z$ -plane.

प्रतिबंध ज्ञात कीजिए कि प्रतिचित्रण  $w = \frac{az + b}{cz + d}$ ,  $w$ -तल में

इकाई वृत्त को  $z$ -तल में सीधी रेखा में प्रतिचित्रित करें।

4. Prove that

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} \text{ where symbols have their usual}$$

meaning.

$$\text{सिद्ध कीजिए } f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} \text{ जहाँ पर संकेतकों}$$

का वास्तविक अर्थ है।

## SECTION-B/( खण्ड-ख )

(Short Answer Type Questions)/( लघु उत्तरों वाले प्रश्न )

**Note :** Section 'B' contains eight (08) short answer type questions of four (04) marks each. Learners are required to answer any four (04) questions only. (4×4=16)

**नोट :** खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरों वाले प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए चार (04) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Find the equation of a straight line joining to given points  $z_1$  and  $z_2$ .

दो बिन्दुओं  $z_1$  तथा  $z_2$  को जोड़ने वाली सीधी रेखा (सरल रेखा) का समीकरण ज्ञात कीजिए।

2. Write short notes :

(a) Translation.

(b) Magnification and rotation.

संक्षिप्त टिप्पणियाँ लिखिए :

(अ) रूपान्तरण।

(ब) आवर्धन तथा घूर्णन।

3. Show that the harmonic functions satisfy the differential

$$\text{equation } \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0.$$

दिखाएं कि हारमोनिक फलन अवकलनीय समीकरण  $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$

को संतुष्ट करेगा।

4. Show that the equation

$$\arg \left( \frac{z - z_1}{z - z_2} \right) = \lambda$$

represents a family of circles every member of which passes through two points  $z_1, z_2$ .

दिखाएं कि समीकरण

$$\arg \left( \frac{z - z_1}{z - z_2} \right) = \lambda$$

एक वृत्त समूह को निरूपित करता है जिसका प्रत्येक वृत्त दो बिन्दुओं  $z_1, z_2$  से गुजरता है।

5. Evaluate the Integral  $\int_C \frac{1}{z-a} dz$  where C is  $|z-a|=l$ .

समाकल  $\int_C \frac{1}{z-a} dz$  का मान ज्ञात कीजिए जहाँ पर C का मान

$$|z-a|=l \text{ है।}$$

6. If  $f(z)$  is analytic within a circle C, given by  $|z-a|=R$  and

$$\text{if } |f(z)| \leq 0 \text{ on C, then } f^{(n)}(a) = \frac{Mn!}{R^n}.$$

यदि फलन  $f(z)$  एक वृत्त C, जिसका समीकरण  $|z-a|=R$  है के अन्दर विश्लेषिक है यदि C की परिधि पर  $|f(z)| \leq 0$  तब

$$\text{दिखाइए कि } f^{(n)}(a) = \frac{Mn!}{R^n}.$$

7. Explain Residue at Infinity.

समझाइए, अनन्त पर अवशेष।

8. If  $f(z) = \frac{\phi(z)}{\psi(z)}$  prove that Residue at a simple pole  $z = a$  is given by  $\frac{\phi(a)}{\psi'(a)}$ .

यदि  $f(z) = \frac{\phi(z)}{\psi(z)}$  सिद्ध कीजिए कि साधारण पोल  $z = a$  पर

अवशेष का मान  $\frac{\phi(a)}{\psi'(a)}$  होगा।

### SECTION-C/( खण्ड-ग )

#### (Objective Type Questions)/( वस्तुनिष्ठ प्रश्न )

**Note :** Section 'C' contains ten (10) objective type questions of half ( $\frac{1}{2}$ ) mark each. All the questions of this section are compulsory. (10× $\frac{1}{2}$ =05)

**नोट :** खण्ड 'ग' में दस (10) तथ्यनिष्ठ प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए आधा ( $\frac{1}{2}$ ) अंक निर्धारित है। इस खण्ड के सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

Write 'T' for True and 'F' for False.

सही के लिए 'T' तथा गलत के लिए 'F' लिखिए।

1.  $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\arg(z_1)}{\arg(z_2)}$

2.  $\arg(z_1, z_2) = \arg(z_1) \arg(z_2)$ .

Fill in the blanks.

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

3.  $z\bar{z} + b\bar{z} + \dots + \dots = 0$  will represent a circle.

$z\bar{z} + b\bar{z} + \dots + \dots = 0$  वृत्त निरूपित करेगा।

4. An Analytic function with constant modules is .....

एक नियत मापक का विश्लेषिक फलन ..... होगा।

5. .... is an equation of a circle in complex variable whose centre is at origin.

समिश्र चर में उस वृत्त का समीकरण जिसका केन्द्र मूल बिन्दु पर हो ..... है।



Choose the correct answer.

सही उत्तर चुनिए।

6.  $\int_0^{\infty} \frac{x^2 \log x}{1+x^2} dx$  has value

- (a) 1
- (b) 0
- (c)  $\infty$
- (d) None of these.

$\int_0^{\infty} \frac{x^2 \log x}{1+x^2} dx$  का मान होगा

- (अ) 1
- (ब) 0
- (स)  $\infty$
- (द) इनमें से कोई नहीं।

7. In a bilinear transformation the constant  $ad - bc$  is known as

- (a) Matrix
- (b) Square matrix
- (c) N cell matrix
- (d) None of these.

द्वि रैखिक प्रतिचित्रण में  $ad - bc$  क्या कहलाता है।

- (क) आव्यूह
- (ख) वर्ग आव्यूह
- (ग) शून्य आव्यूह
- (घ) इनमें से कोई नहीं।

8. If four points  $z_1, z_2, z_3, z_4$  lies on a circle the cross ratio  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$  is

- (a) Real
- (b) Complex
- (c) Imaginary
- (d) None of above.

यदि चार बिन्दु  $z_1, z_2, z_3, z_4$  एक वृत्त पर हो तो क्रॉस अनुपात  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$  होगा।

(क) वास्तविक

(ख) समिश्र

(ग) काल्पनिक

(घ) उपरोक्त में कोई नहीं।

9. At the origin, function  $f(z) = |z|^2$  is

(a) Continuous

(b) Differentiable

(c) Both (a) and (b)

(d) None of above.

मूलबिन्दु पर फलन  $f(z) = |z|^2$

(अ) सतत्

(ब) अवकलनीय

(स) दोनों (अ) तथा (ब)

(द) उपरोक्त में से कोई नहीं।

10.  $\frac{d}{dz}(\bar{z})$  exists everywhere.

(True/False)

$\frac{d}{dz}(\bar{z})$  हर जगह मौजूद है।

(सही/गलत)

---