 Roll No. ....

MT-07

Algebra

बीजगणित

Bachelor of Science (BSC-12/16)

Third Year Examination, 2019 (June)

Time : 3 Hours] **Max. Marks : 40**

Note : This paper is of Forty (40) marks divided into three (03) sections A, B and C. Attempt the questions contained in these sections according to the detailed instructions given therein.

नोट : यह प्रश्नपत्र चालीस (40) अंकों का है जो तीन (03) खण्डों क, ख तथा ग में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों को हल करना है।

SECTION–A/(खण्ड–क)

(Long Answer Type Questions)/(दीर्घ उत्तरों वाले प्रश्न)

Note : Section 'A' contains four (04) long answer type questions of Nine and half (9½) marks each. Learners are required to answer any two (2) questions only.

(2×9½=19)

नोट : खण्ड 'क' में चार (04) दीर्घ उत्तरों वाले प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए साढे नौ (9½) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. If θ* is the set of non-zero rational numbers and * is an operation defined on θ* by $a * b = \frac{ab}{3}$ for all $a, b \in \theta *$, then show that (θ*, *) is a group.

यदि θ* शून्येतर परिमेय संख्याओं का समुच्चय है और *, सभी $a, b \in \theta *$ के लिए $a * b = \frac{ab}{3}$ द्वारा θ* पर परिभाषित संक्रिया है, तब दिखाइए कि (θ*, *) एक समूह है।

2. Prove that every independent subset of a finitely generated vector space V(F) is either a basis or can be extended to form a basis of V.

सिद्ध कीजिए कि परिनित रूप से उत्पन्न सदिश समिष्टि V(F) का प्रत्येक स्वतंत्र उपसमुच्चय या तो आधार होता है या आधार को बनाने के रूप में व्यक्त किया जाता है।

3. Prove that any finite group is a subgroup of a permutation group.

सिद्ध कीजिए कि कोई भी परिमित समूह क्रमचय समूह का एक उपसमूह होता है।

4. Let $s = \{u, v, w\}$ be linearly independent set of vector space V(F). Then show that the sets

(i) $S_1 = (u + v, v + w, w + u)$ and

(ii) $S_2 = \{u + v, u - v, u - 2v + w\}$ are linearly independent.

माना कि $s = \{u, v, w\}$ किसी सदिश समष्टि V(F) का एकघाततः स्वतन्त्र समुच्चय है। प्रदर्शित कीजिए कि समुच्चय

(i) $S_1 = (u + v, v + w, w + u)$ और

(ii) $S_2 = \{u + v, u - v, u - 2v + w\}$ एक घाततः स्वतन्त्र है।

SECTION–B/(खण्ड-ख)

(Short Answer Type Questions)/(लघु उत्तरों वाले प्रश्न)

Note : Section 'B' contains eight (08) short answer type questions of four (04) marks each. Learners are required to answer any four (04) questions only. (4×4=16)

नोट : खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरों वाले प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए चार (04) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Write the permutation

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

as a product of disjoint cycles and then as a product of transpositions.

क्रमचय $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ को असंयुक्त चक्रों के गुणनफल के रूप में और तब पक्षांतरणों के गुणनफल के रूप में लिखिए।

2. Let G be a group and H, K be normal subgroups of G. Let $H \cap K = \{e\}$. Then show that $bk = kh$ for each $h \in$ H, $k \in$ K.

मान लीजिए कि G एक समूह है तथा H, K समूह G के प्रसामान्य उपसमूह हैं। मान लिजिए कि $H \cap K = \{e\}$ है। तब, दर्शाइए कि प्रत्येक $h \in$ H, $k \in$ K के लिए $bk = kh$ है।

3. If R is commutative ring and $a \in$ R then prove that :

Ra = {ra : $r \in$ R} is an ideal of R.

यदि R एक क्रम विनिमेय वलय है और $a \in$ R तब सिद्ध कीजिए कि Ra = {ra : $r \in$ R} समूह R का एक गुणनावली है।

4. State and prove Lagrange's theorem for finite group.

परिमित समूह के लिए लैग्रांज की प्रमेय लिखिए और सिद्ध कीजिए।

5. If $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ is a basis of $V_3(R)$, then show that $\{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1\}$ is also a basis of $V_3(R)$.

अगर $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ सदिश समष्टि $V_3(R)$ का आधार है तो सिद्ध कीजिए कि $\{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1\}$ की सदिश समष्टि $V_3(R)$ का आधार होगा।

6. Prove that every n-dimensional vector space V(F) is isomorphic to $V_n(F)$.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक दिशित सदिश समष्टि V(F) समकारित होती है $V_n(F)$ से।

7. Let w_1 and w_2 be subspaces of a finite dimensional vector space V(F) then prove that $\dim(w_1 + w_2) = \dim(w_1) + \dim(w_2) - \dim(w_1 \cap w_2)$.

यदि w_1 एवं w_2 किसी परिमित विभीय सदिश समष्टि V(F) की दो उपसमष्टियाँ हों, तो सिद्ध कीजिए

विभा$(w_1 + w_2)$ = विभा(w_1) + विभा(w_2) – विभा $(w_1 \cap w_2)$

8. Prove that the intersection of any two subgroups of a group is again a subgroup of the group.

सिद्ध कीजिए कि किसी समूह के दो उपसमूहों का सर्वनिष्ठ पुनः समूह का उपसमूह होता है।

SECTION–C/(खण्ड–ग)

(Objective Type Questions)/(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

Note : Section 'C' contains ten (10) objective type questions of half (½) mark each. All the questions of this section are compulsory. (10×½=05)

नोट : खण्ड 'ग' में दस (10) वस्तुनिष्ठ प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए आधा (½) अंक निर्धारित है। इस खण्ड के सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

Choose the correct answer :

सही उत्तर का चयन कीजिए :

1. A subgroup H of a group G is called a normal subgroup of G. If $\forall\ x \in$ G

(a) $xH \neq Hx$

(b) $xH = Hx$

(c) $xH^{-1}x = x^{-1}Hx$

(d) None of these.

समूह G का उपसमूह H प्रसामान्य उपसमूह G का कहलाता है यदि $\forall\ x \in$ G

(अ) $xH \neq Hx$

(ब) $xH = Hx$

(स) $xH^{-1}x = x^{-1}Hx$

(द) इनमें से कोई नहीं।

2. A commutative ring R with unity element is called a field, if :

(a) It is with proper zero divisors

(b) Every non zero element in it has a multiplicative inverse

(c) It is without proper zero divisors

(d) None of these.

तत्समक अवयव वाली एक क्रमविनिमेय वलय R एक क्षेत्र कहलाती है, यदि:

(अ) यह उचित शून्य भाजक सहित है।

(ब) इसके शून्येत्तर अवयव गुणात्मक प्रतिलोम रखते है।

(स) यह उचित शून्य भाजक रहित है।

(द) इनमें से कोई नहीं।

3. The characteristic of an integral domain is :

(a) 0

(b) A prime number

(c) Never a prime mumber

(d) Either 0 or a prime number.

एक पूर्णांकीय प्रान्त का अभिलक्षण है:

(अ) 0

(ब) एक अभाज्य संख्या

(स) एक अभाज्य संख्या कभी नहीं

(द) 0 या एक अभाज्य संख्या।

4. The number of generators of the cyclic group G of order 8 is :

(a) 2

(b) 4

(c) 6

(d) 8.

क्रम 8 के चक्रीय समूह G के जनकों की संख्या है:

(अ) 2

(ब) 4

(स) 6

(द) 8.

5. If G be a group and N is a normal subgroup of G then

(a) $(Na)(Nb) \neq N(a, b)\ \forall\ a, b \in G$

(b) $(Na)(Nb) = N^2(a, b)\ \forall\ a, b \in G$

(c) $(Na)(Nb) = N(a, b)\ \forall\ a, b \in G$

(d) None of these.

यदि G एक समुच्चय है और N समूह G का प्रसामान्य उपसमूह है, तब

(अ) $(Na)(Nb) \neq N(a, b)\ \forall\ a, b \in G$

(ब) $(Na)(Nb) = N^2(a, b)\ \forall\ a, b \in G$

(स) $(Na)(Nb) = N(a, b)\ \forall\ a, b \in G$

(द) इनमें से कोई नहीं।

Write T for true and F for false :

सही के लिए T तथा गलत के F लिखें:

6. Every finite group G is isomorphic to a permutation group.

प्रत्येक परिमित समूह G क्रमचय समूह की तुल्यकारी है।

7. Two vectors are linearly dependent, one of them is a scalar multiple of other.

दो सदिश यदि एक घाती स्वतन्त्र होते हैं तो उनमें से एक दूसरे का आदिस गुणांक होता है।

8. Vector $V_1 = (1, -1, 0)$, $V_2 = (1, 3, -1)$ and $V3 = (5, 3, -2)$ in vector space V(R) is linearly dependent.

सदिश समष्टि V(R) में सदिश $V_1 = (1, -1, 0)$, $V_2 = (1, 3, -1)$ तथा $V3 = (5, 3, -2)$ एक घातत: आश्रित है।

9. The following vectors $V_1 = (1, 0, 0)$, $V_2 = (1, 1, 0)$, $V_3 = (1, 1, 1)$, $V_4 = (0, 1, 0)$ form a basis in R^4.

निम्नलिखित सदिश, R^4 का आधार बनाते है

$V_1 = (1, 0, 0)$, $V_2 = (1, 1, 0)$, $V_3 = (1, 1, 1)$, $V_4 = (0, 1, 0)$

10. Permutation multiplication is commutative in general.

क्रमचयों का गुणन सामान्यतया क्रमविनिमेय होता है।