 Roll No. ....

MT-04

Real Analysis and Metric Space

वास्तविक विश्लेषण एवं दूरीक समष्ठी

Bachelor of Science (BSC-12/16)

Second Year, Examination, 2019 (June)

Time : 3 Hours] **Max. Marks : 40**

Note : This paper is of Forty (40) marks divided into three (03) sections A, B and C. Attempt the questions contained in these sections according to the detailed instructions given therein.

नोट : यह प्रश्नपत्र चालीस (40) अंकों का है जो तीन (03) खण्डों क, ख तथा ग में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों को हल करना है।

SECTION–A/(खण्ड–क)

(Long Answer Type Questions)/(दीर्घ उत्तरों वाले प्रश्न)

Note : Section 'A' contains four (04) long answer type questions of Nine and half (9½) marks each. Learners are required to answer any two (2) questions only.

(2×9½=19)

नोट : खण्ड 'क' में चार (04) दीर्घ उत्तरों वाले प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए साढ़े नौ (9½) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Show that the sequence $<a_n>$ defined by

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{9}{a_n}\right), n \geq 1 \text{ and } a_1 > 0 \text{ converges to 3.}$$

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $<a_n>$ जो परिभाषित है

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{9}{a_n}\right),\ n \geq 1 \text{ और } a_1 > 0 \ 3 \text{ पर अभिसारी है।}$$

2. State and prove Lagrange's mean value theorem.

लेग्रान्जे मीन वैल्यू प्रमेय के कथन को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

3. Prove that the function f defined on [0, 1] as

$$\begin{aligned} f(x) &= 2n \quad \text{if } x = \frac{1}{n}, \text{ where } n = 1, 2, 3...... \\ &= 0 \quad \text{otherwise} \end{aligned}$$

is not Riemann-integrable on [0, 1].

सिद्ध कीजिए कि [0, 1] पर परिभाषित फलन f,

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x \quad \text{यदि } x = \frac{1}{n}, \text{ जहाँ } n = 1, 2, 3...... \\ &= 0 \quad \text{अन्यथा} \end{aligned}$$

रीमान समाकलनीय नहीं है।

4. Let (X, d) be any metric space. Show that the function d_1, defined by

$$d_1\,(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \;\forall\; x, y \in X \text{ is a metric on X.}$$

यदि (X, d) एक दूरीक समष्टि है। तब सिद्ध कीजिए कि निम्न परिभाषित फलन d_1

$$d_1\,(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \;\forall\; x, y \in X$$ X पर दूरी है।

SECTION–B/(खण्ड-ख)

(Short Answer Type Questions)/(लघु उत्तरों वाले प्रश्न)

Note : Section 'B' contains eight (08) short answer type questions of four (04) marks each. Learners are required to answer any four (04) questions only. (4×4=16)

नोट : खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरों वाले प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए चार (04) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Write Archimedean property of real numbers and prove it.

वास्तविक संख्याओं का आर्किमीडियन गुण लिखिए एवम् सिद्ध कीजिए।

2. A set is closed iff its complement is open.

एक समुच्चय संवृत होगा यदि और केवल यदि उसका पूरक विवृत है।

3. Show that $\lim_{n\to\infty} \frac{3+2\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 2.$

सिद्ध कीजिए $\lim_{n\to\infty} \frac{3+2\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 2.$

4. Show that function f is continuous at origin

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = 0 \end{cases}$$

सिद्ध कीजिए कि फलन f मूल बिन्दु पर सतत् है।

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

5. Show that the function $f(x) = x|x|$ is differentiable at the origin.

सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = x|x|$ मूल बिन्दु पर अवकलनीय है।

6. Let A and B be any two subsets of metric space (X, d) then if $A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$.

यदि A और B दूरीक समष्टि (X, d) के कोई दो उप समुच्चय हैं यदि $A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$.

7. If A and B any two non empty subsets of a metric space X. If $A \cap B \neq \phi$ then $d(A \cup B) \leq d(A) + d(B)$.

यदि A व B दूरीक समष्टि X के दो अरिक्त उपसमुच्चय हैं। यदि $A \cap B \neq \phi$ तब $d(A \cup B) \leq d(A) + d(B)$.

8. Every continuous function is integrable.

प्रत्येक सतत् फलन समाकलनीय है।

SECTION–C/(खण्ड–ग)

(Objective Type Questions)/(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

Note : Section 'C' contains ten (10) objective type questions of half (½) mark each. All the questions of this section are compulsory. (10×½=05)

नोट : खण्ड 'ग' में दस (10) तथ्यनिष्ठ प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए आधा (½) अंक निर्धारित है। इस खण्ड के सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

Write T for True and F for False statement :

सत्य कथन के लिए T और असत्य कथन के लिए F लिखिए :

1. $\sqrt{2}$ is a rational number.

$\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

2. $|x-y| \geq |x| - |y| \ \forall \ x, y \in \mathrm{R}$.

$|x-y| \geq |x| - |y| \ \forall \ x, y \in \mathrm{R}$.

3. $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathrm{N}\right\}$ is open set.

$\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathrm{N}\right\}$ एक विवृत समुच्चय है।

4. Every convergent sequence is bounded.

प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम सीमित होता है।

5. $\lim_{x \to 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 0$.

$\lim_{x \to 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 0$.

6. $f(x) = |x|$ is differentiable at $x = 0$.

$f(x) = |x|$ $x = 0$ पर अवकलनीय है।

7. $(3x + 1)$ is integrable on $[1, 2]$.

$(3x + 1)$, $[1, 2]$ में समाकलनीय है।

8. $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} xy \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = 0$.

$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} xy \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = 0$.

9. $d(x, y) = 0$ iff $x = y \ \forall \ x, y \in X$ where d is a metric.

$d(x, y) = 0$ केवल और केवल यदि $x = y \ \forall \ x, y \in X$ जहां d एक दूरीक है।

10. $\overline{A}$ is the smallest closed subset of A.

$\overline{A}$, A का सबसे छोटा सवृत उपसमुच्चय है।