S-746 Roll No. ……..

MT–08

Complex Analysis

(सम्मिश्र विश्लेषण)

Bachelor of Science (BSC–12/16/17)

Third Year, Examination, 2018

Time : 3 Hours **Max. Marks : 40**

Note : This paper is of **forty (40)** marks containing **three (03)** Sections A, B and C. Learners are required to attempt the questions contained in these Sections according to the detailed instructions given therein.

नोट : यह प्रश्न पत्र चालीस (40) अंकों का है जो तीन (03) खण्डों 'क', 'ख' तथा 'ग' में विभाजित है। शिक्षार्थियों को इन खण्डों में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

Section–A / खण्ड–क

(Long Answer Type Questions) / (दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

Note : Section 'A' contains four (04) long answer type questions of nine and half ($9\frac{1}{2}$) marks each. Learners are required to answer *two* (02) questions only.

नोट : खण्ड 'क' में चार (04) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए साढ़े नौ $(9\frac{1}{2})$ अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Prove that the triangle whose vertices are the points z_1, z_2, z_3 on the complex plane is equilateral if :

$$\frac{1}{z_2 - z_3} + \frac{1}{z_3 - z_1} + \frac{1}{z_1 - z_2} = 0 .$$

सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज जिसके शीर्ष बिन्दु सम्मिश्रित तल पर स्थित बिन्दु z_1, z_2, z_3 हों, एक समबाहु त्रिभुज होगा यदि :

$$\frac{1}{z_2 - z_3} + \frac{1}{z_3 - z_1} + \frac{1}{z_1 - z_2} = 0 .$$

2. If $u = \dfrac{\sin 2x}{\cosh 2y + \cos 2x}$, find the corresponding analytic function $f(z) = u + iv$.

यदि $u = \dfrac{\sin 2x}{\cosh 2y + \cos 2x}$, तब संगत विश्लेषिक फलन $f(z) = u + iv$ प्राप्त कीजिए।

3. Show that generally a bilinear transformation can be expressed as the sum of the transformation of the form $w = z + \alpha$, $w = \beta z$, $w = \dfrac{1}{z}$. Symbols have their usual meaning.

दर्शाइये कि सामान्यतया एक द्विरैखिक रूपान्तरण को $w = z + \alpha$, $w = \beta z$, $w = \frac{1}{z}$ प्रकार के रूपान्तरणों के योग में व्यक्त किया जा सकता है। संकेतों का वास्तविक अर्थ लिया गया है।

4. Evaluate :

$$\int_0^{2\pi} e^{-\cos\theta} \cos(n\theta + \sin\theta)\, d\theta,$$

where n is a positive integer.

$\int_0^{2\pi} e^{-\cos\theta} \cos(n\theta + \sin\theta)\, d\theta$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ पर n एक धनात्मक पूर्णांक है।

Section–B / खण्ड–ख

(Short Answer Type Questions) / (लघु उत्तरीय प्रश्न)

Note : Section 'B' contains eight (08) short answer type questions of four (04) marks each. Learners are required to answer *four* (04) questions only.

नोट : खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए चार (04) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Find the residue of $\frac{z^3}{(z-1)^4 (z-2)(z-3)}$ at $z = 1$.

फलन $\frac{z^3}{(z-1)^4 (z-2)(z-3)}$ का $z = 1$ पर अवशेष ज्ञात कीजिए।

2. Find poles of $f(z)$ given by :

$$f(z) = \sec \frac{1}{z}$$

फलन $f(z)$ के ध्रुवों का मान ज्ञात कीजिए :

$$f(z) = \sec \frac{1}{z}$$

3. Using Cauchy's integral formula evaluate :

$$\int_C \frac{dz}{z(z + \pi i)}$$

where C is $|z + 3i| = 1$.

समाकलन :

$$\int_C \frac{dz}{z(z + \pi i)}$$

जहाँ C $|z + 3i| = 1$ है, का मान कोशी समाकलन सूत्र का प्रयोग करके ज्ञात कीजिए।

4. Deduce Maclaurin's theorem from Taylor's theorem.
टेलर के प्रमेय से मैकलौरिन का प्रमेय प्राप्त कीजिए।

5. Find the Taylor's series which represents the function $\frac{z^2 - 1}{(z + 2)(z + 3)}$ when $|z| < 2$.

टेलर की श्रृंखला प्राप्त कीजिए जो कि फलन $\frac{z^2 - 1}{(z + 2)(z + 3)}$ को निरूपित करती है जब $|z| < 2$ हो।

6. Evaluate :

$$\int_0^a \frac{a\, d\phi}{a^2 + \cos^2 \phi}$$

where a is positive.

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^a \frac{a\, d\phi}{a^2 + \cos^2 \phi}$$

जहाँ पर a धनात्मक है।

7. Give geometrical interpretation of the transformations :

$$w = z + \alpha, \quad w = \beta z, \quad w = \frac{1}{z}.$$

where symbols have their usual meanings.

निम्नलिखित रूपान्तरणों का ज्यामितीय विश्लेषण कीजिए :

$$w = z + \alpha, \quad w = \beta z, \quad w = \frac{1}{z}$$ |

जहाँ पर संकेताक्षरों का सामान्य अर्थ है।

8. If λ is real, a, b are complex such that $|a| > |b|$, examine the transformation :

$$w = e^{i\lambda} \frac{az + b}{\bar{a} + \bar{b}z}$$

यदि λ वास्तविक है, a, b सम्मिश्रित हैं जहाँ पर $|a| > |b|$, निम्नांकित रूपान्तरण का मूल्यांकन कीजिए :

$$w = e^{i\lambda} \frac{az + b}{\bar{a} + \bar{b}z}$$

Section–C / खण्ड–ग

(Objective Type Questions) / (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

Note : Section 'C' contains ten (10) objective type questions of half $\left(\frac{1}{2}\right)$ mark each. All the questions of this Section are compulsory.

नोट : खण्ड 'ग' में दस (10) वस्तुनिष्ठ प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए आधा $\left(\frac{1}{2}\right)$ अंक निर्धारित है। इस खण्ड के सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

Write T for True and F for False in the following.

निम्नलिखित में सत्य के लिए 'T' तथा असत्य के लिए 'F' लिखिए।

1. $|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2|$. (True/False)

   $|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2|$ । (सत्य / असत्य)

2. An equation of the form $\bar{z}\bar{z} + \bar{b}\bar{z} + bz + c = 0$ will represent a circle. (True/False)

   समीकरण $\bar{z}\bar{z} + \bar{b}\bar{z} + bz + c = 0$ एक वृत्त निरूपित करेगा। (सत्य / असत्य)

3. In usual notation $u_x = v_y$ and $u_y = v_x$ are known as Cauchy-Riemann equations. (True/False)

   वास्तविक संकेताक्षरों में $u_x = v_y$ और $u_y = v_x$ कोशी-रीमान समीकरण कहलाते हैं। (सत्य / असत्य)

Fill in the blanks.

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

4. $w = 2z$ is a ..... transformation.

   $w = 2z$ एक ..... रूपान्तरण है।

5. A pole of order one is a ..... pole.

   क्रम एक का ध्रुव, एक ..... ध्रुव होता है।

6. Under the mapping $w = z + 2 - i$, the image of the line $x = 1$ is ..... .

   प्रतिचित्रण $w = z + 2 - i$ के अन्तर्गत, रेखा $x = 1$ का प्रतिबिम्ब होगा ..... ।

7. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} =$ .....

8. $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}$ ..... and ..... $= -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$.

9. $\left|\frac{z - p}{z - q}\right| = k$ represents .....

   $\left|\frac{z - p}{z - q}\right| = k$, प्रदर्शित करता है ..... ।

10. $2\left|z_1\right|^2 + 2\left|z_2\right|^2 =$ .....