S-722 Roll No. ……………………..

MT–07

Algebra

(बीजगणित)

Bachelor of Science (BSC-12/16/17)

Third Year, Examination, 2018

Time : 3 Hours **Max. Marks : 40**

Note : This paper is of **forty (40)** marks containing **three (03)** Sections A, B and C. Learners are required to attempt the questions contained in these Sections according to the detailed instructions given therein.

नोट : यह प्रश्न पत्र चालीस (40) अंकों का है जो तीन (03) खण्डों 'क', 'ख' तथा 'ग' में विभाजित है। शिक्षार्थियों को इन खण्डों में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

Section–A / खण्ड–क

(Long Answer Type Questions) / (दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

Note : Section 'A' contains four (04) long answer type questions of nine and half ($9\frac{1}{2}$) marks each. Learners are required to answer *two* (02) questions only.

नोट : खण्ड 'क' में चार (04) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए साढ़े नौ ($9\frac{1}{2}$) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Prove that the necessary and sufficient condition for a non-empty subset H of a group G to be a subgroup is that $a \in H, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$, where b^{-1} is the inverse of *b* in G.

   सिद्ध कीजिये कि किसी समूह G के उपसमुच्चय H के उपसमूह होने की आवश्यक और पर्याप्त शर्त है $a \in H, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$, जहाँ b^{-1} G में *b* का व्युत्क्रम है।

2. Show that the union of two subgroup is a subgroup if and only if one is contained in other.

   दिखाइए के दो उपसमूहों का संघ एक उपसमूह होगा यदि और केवल यदि एक-दूसरे में निहित हो।

3. Show that the set P_3 of all permutation on three symbols 1, 2, 3 is a finite non-abelian group of order 6 with respect to permutation multiplication as composition.

   दिखाइए कि 1, 2, 3 के क्रमचय समूह का समुच्चय P_3 क्रमचय गुणन के लिए एक 6 क्रम का नियत आबेली समूह होगा।

4. Prove that there exists a basis for each finite dimensional vector space.

   सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक नियत आकार के सदिश समष्टि के लिए एक आधार मौजूद होता है।

Section–B / खण्ड–ख

(Short Answer Type Questions) / (लघु उत्तरीय प्रश्न)

Note : Section 'B' contains eight (08) short answer type questions of four (04) marks each. Learners are required to answer *four* (04) questions only.

नोट : खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए चार (04) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Show that the set $G = \{x + y\sqrt{3} : x, y \in Q\}$ is a group w. r. t. addition.

   दिखाइए कि समुच्चय $G = \{x + y\sqrt{3} : x, y \in Q\}$ जोड़ के लिए एक समूह होता है।

2. If G is a finite group of $a \in G$, then order of a divides o (G).

   यदि G एक नियम समूह है और $a \in G$, तो a का क्रम $o(G)$ को विभाजित करेगा।

3. In any ring R, show that :

$$(-a)(-b) = ab \; \forall \; a, b \in R$$

   किसी वलय R के लिए दिखाइए कि :

$$(-a)(-b) = ab \; \forall \; a, b \in R$$

4. Show that non-zero finite integral domain is a field.

   दिखाइए कि अशून्य नियत पूर्णांकीय प्रान्त एक क्षेत्र होता है।

5. Define subspace of the vector space.
किसी सदिश समष्टि की उपसमष्टि को परिभाषित कीजिए।

6. Show that a finite dimensional vector space has a finite basis.
दिखाइए कि किसी नियत आकार की सदिश समष्टि का एक नियत आधार होता है।

7. Define isomorphism of vector space.
किसी सदिश समष्टि के लिए समाकारिता को परिभाषित कीजिए।

8. Prove that any homomorphism of vector space onto itself is an isomorphism.
सिद्ध कीजिये कि किसी सदिश समष्टि के लिए स्वयं पर समारूपता, समाकारिता होती है।

Section–C / खण्ड–ग

(Objective Type Questions) / (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

Note : Section 'C' contains ten (10) objective type questions of half $\left(\frac{1}{2}\right)$ mark each. All the questions of this Section are compulsory.

नोट : खण्ड 'ग' में दस (10) वस्तुनिष्ठ प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए आधा $\left(\frac{1}{2}\right)$ अंक निर्धारित है। इस खण्ड के सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

Choose the correct answer :

सही उत्तर चुनिए :

1. In a group G for each element $a \in G$ there is :
   (a) No inverse

(b) A unique inverse $a^{-1} \in G$

(c) More than one inverse

(d) None of these

किसी समूह G के प्रत्येक अवयव $a \in G$ के लिए :

(अ) कोई प्रतिलोम अवयव नहीं होगा

(ब) एक अद्वितीय प्रतिलोम $a^{-1} \in G$

(स) एक से ज्यादा प्रतिलोम

(द) इनमें से कोई नहीं

2. A ring R is an integral domain if :

(a) R is a commutative ring

(b) R is commutative ring with zero divisor

(c) R is commutative ring with no zero divisor

(d) R is ring with zero divisor

वलय R एक पूर्णांकीय प्रान्त होगा यदि :

(अ) R एक विनिमेय वलय होगी

(ब) R एक विनिमेय वलय होगी शून्य विभाजक के साथ

(स) R एक विनिमेय वलय होगी शून्य विभाजक के बिना

(द) R एक वलय होगी शून्य विभाजक के साथ

3. Given permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ is equivalent to :

(a) (1632) (21)

(b) (1632) (11)

(c) (1632) (45)

(d) (1632) (34)

क्रमचय $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ बराबर होगा :

(अ) (1632) (21)

(ब) (1632) (11)

(स) (1632) (45)

(द) (1632) (34)

4. The dimension of the vector space is :

(a) Number of elements in the vector space

(b) Number of elements in basis of vector space

(c) Subspace of vector space

(d) None of these

किसी सदिश समष्टि का आकार होता है :

(अ) सदिश समष्टि में जितने अवयव होते हैं

(ब) सदिश समष्टि के आधार में जितने अवयव होते हैं

(स) सदिश समष्टि की उपसमष्टि

(द) इनमें से कोई नहीं

5. The set I of integers w. r. to ordinary addition and multiplication is :

(a) A field

(b) Not a field

(c) A ring

(d) Not a ring

साधारण जोड़ एवं गुणन के लिए पूर्णांकों का समुच्चय I होता है :

(अ) एक क्षेत्र

(ब) क्षेत्र नहीं

(स) एक वलय

(द) वलय नहीं

6. Which of the following is true ?

(a) Every group is a field

(b) Every ring is a field

(c) Every integral domain is a field

(d) Every finite integral domain is a field

निम्नलिखित में से कौन-सा सत्य है ?

(अ) प्रत्येक समूह क्षेत्र होता है

(ब) प्रत्येक वलय एक क्षेत्र होता है

(स) प्रत्येक पूर्णांकीय प्रान्त एक क्षेत्र होता है

(द) प्रत्येक परिमित पूर्णांकीय प्रान्त एक सदिश क्षेत्र होता है

7. Let T be a linear transformation on finite vector space V, than :

(a) Rank T < Dim V

(b) Rank T = Dim V

(c) Rank T > Dim V

(d) Rank T = Nullity (V)

T एक रैखिक परिवर्तन है किसी सदिश समष्टि V पर, तो :

(अ) Rank T < Dim V

(ब) Rank T = Dim V

(स) Rank T > Dim V

(द) Rank T = Nullity (V)

8. If a set contains a zero vector, then :

(a) Set is linearly dependent

(b) Set is linearly independent

(c) Set is null set

(d) None of these

यदि एक समुच्चय में अशून्य सदिश हों, तो :

(अ) समुच्चय एकघातीय स्वतन्त्र होगा

(ब) समुच्चय एकघातीय आश्रित होगा

(स) समुच्चय शून्य होगा

(द) इनमें से कोई नहीं

9. A linear transformation T from V to W is isomorphism if it is :

(a) Into

(b) Onto

(c) One-one

(d) None of the above

रैखिक परिवर्तन आइसोमार्फिक है V से W तक, यदि यह है :

(अ) आन्तरिक आच्छादक

(ब) आच्छादक

(स) एकैकी

(द) उपर्युक्त में से कोई नहीं

10. If W_1 and W_2 are subspaces of V, then which of the following is false ?

(a) $W_1 \cup W_2$ is a subspace of V

(b) $W_1 \cap W_2$ is a subspace of V

(c) $W_1 + W_2$ in a subspace of V

(d) $W_1 \cup W_2$ is not a subspace of V

यदि w_1 और w_2 उपसमष्टियाँ हैं v की, तो कौन-सा कथन असत्य होगा ?

(अ) $W_1 \cup W_2$ एक उपसमष्टि होगी V की

(ब) $W_1 \cap W_2$ एक उपसमष्टि होगी V की

(स) $w_1 + w_2$ एक उपसमष्टि होगी V की

(द) $w_1 \cup w_2$ एक उपसमष्टि नहीं होगी V की