MT–06

Numerical Analysis & Vector Calculus

(संख्यात्मक विश्लेषण एवं सदिश कलन)

Bachelor of Science (BSC–12/16/17)

Second Year, Examination, 2018

Time : 3 Hours **Max. Marks : 40**

Note : This paper is of **forty (40)** marks containing **three (03)** Sections A, B and C. Learners are required to attempt the questions contained in these Sections according to the detailed instructions given therein.

नोट : यह प्रश्न पत्र चालीस (40) अंकों का है जो तीन (03) खण्डों 'क', 'ख' तथा 'ग' में विभाजित है। शिक्षार्थियों को इन खण्डों में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

Section–A / खण्ड–क

(Long Answer Type Questions) / (दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

Note : Section 'A' contains four (04) long answer type questions of nine and half ($9\frac{1}{2}$) marks each. Learners are required to answer *two* (02) questions only.

नोट : खण्ड 'क' में चार (04) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए साढ़े नौ ($9\frac{1}{2}$) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Verify Stokes' theorem for the function $\vec{F} = x^2\hat{i} + xy\,\hat{j}$ integrated along the rectangle c, in the plane $z = 0$, whose sides are along the lines $x = 0$, $y = 0$, $x = a$ and $y = b$.

   समतल $z = 0$ पर फलन $\vec{F} = x^2\hat{i} + xy\,\hat{j}$ के लिए स्टोक्स की प्रमेय का सत्यापन कीजिए जहाँ F सरल रेखाओं $x = 0$, $y = 0$, $x = a$ और $y = b$ द्वारा निर्मित आयत की परिसीमा है।

2. Find the real root of the equation $x^3 + x - 3 = 0$ that lies between 1.2 and 1.3.

   समीकरण $x^3 + x - 3 = 0$ का वास्तविक मूल ज्ञात कीजिए जो 1.2 और 1.3 के मध्य स्थित है।

3. Prove that :

$$\text{curl}\left[r^n\left(\vec{a} \times \vec{r}\right)\right] = (n+2)\,r^n\,\vec{a} - nr^{n-2}\left(\vec{r}\cdot\vec{a}\right)\vec{r}$$

   where $\vec{a}$ is a constant vector.

   सिद्ध कीजिए कि :

$$\text{curl}\left[r^n\left(\vec{a} \times \vec{r}\right)\right] = (n+2)\,r^n\,\vec{a} - nr^{n-2}\left(\vec{r}\cdot\vec{a}\right)\vec{r}$$

   जहाँ $\vec{a}$ स्थिर वैक्टर है।

4. From the following table, find the values of tan 45°15′ using interpolation formula :

$x°$	tan $x°$
45	1.00000
46	1.03553
47	1.07237
48	1.11061
49	1.15037
50	1.19175

निम्नलिखित सारणी से अन्तर्वेशन सूत्र के प्रयोग द्वारा tan 45° 15′ का मान ज्ञात कीजिए :

$x°$	tan $x°$
45	1.00000
46	1.03553
47	1.07237
48	1.11061
49	1.15037
50	1.19175

Section–B / खण्ड–ख

(Short Answer Type Questions) / (लघु उत्तरीय प्रश्न)

Note : Section 'B' contains eight (08) short answer type questions of four (04) marks each. Learners are required to answer *four* (04) questions only.

नोट : खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए चार (04) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. If $f(0) = -3$, $f(1) = 6$, $f(2) = 8$, $f(3) = 12$ and the third difference is constant, then find $f(6)$.

यदि $f(0) = -3$, $f(1) = 6$, $f(2) = 8$, $f(3) = 12$ तथा तीसरा अन्तर अचर हो, तो $f(6)$ ज्ञात कीजिए।

2. Prove that :

(i) $\mu^2 \equiv 1 + \frac{\delta^2}{4}$

(ii) $\mu + \frac{\delta}{2} \equiv E^{\frac{1}{2}}$

सिद्ध कीजिए कि :

(i) $\mu^2 \equiv 1 + \frac{\delta^2}{4}$

(ii) $\mu + \frac{\delta}{2} \equiv E^{\frac{1}{2}}$

3. Prove that :

$$y' = \frac{\mu}{h}\left(\delta y - \frac{1}{6}\delta^3 y + \frac{1}{30}\delta^5 y \ldots\ldots\right)$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$y' = \frac{\mu}{h}\left(\delta y - \frac{1}{6}\delta^3 y + \frac{1}{30}\delta^5 y \ldots\ldots\right)$$

4. Find the value of the integral $\int_4^{5.2} \log x \, dx$ using Trapezoidal rule.

ट्रेपेजोइडल समलम्बीय नियम द्वारा निम्न समाकल का मान निकालिए : $\int_4^{5.2} \log x \, dx$ ।

5. Prove that :

$$\operatorname{div}(r^n \vec{r}) = (n+3) r^n$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\operatorname{div}(r^n \vec{r}) = (n+3) r^n$$

6. If :

$$\vec{r} = a \cos t \, \hat{i} + a \sin t \, \hat{j} + at \tan \alpha \, \hat{k}$$

find :

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt} \; \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \; \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} \right]$$

यदि :

$$\vec{r} = a \cos t \, \hat{i} + a \sin t \, \hat{j} + at \tan \alpha \, \hat{k}$$

तो $\left[\frac{d\vec{r}}{dt} \; \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \; \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} \right]$ का मान ज्ञात कीजिए।

7. Find the directional derivative of the function $\phi(x) = xy^2 + yz^2 + zx^2$ along the tangent to the curve $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$ at the point (1, 1, 1).

फलन $\phi(x) = xy^2 + yz^2 + zx^2$ के बिन्दु (1, 1, 1) पर वक्र $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$ की स्पर्श रेखा की दिशा में दिक् अवकलज ज्ञात कीजिए।

8. Prove that :

$$\underset{y,z}{\Delta^2}\, x^3 = x + y + z$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\underset{y,z}{\Delta^2}\, x^3 = x + y + z$$

Section–C / खण्ड–ग

(Objective Type Questions) / (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

Note : Section 'C' contains ten (10) objective type questions of half $\left(\frac{1}{2}\right)$ mark each. All the questions of this Section are compulsory.

नोट : खण्ड 'ग' में दस (10) वस्तुनिष्ठ प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए आधा $\left(\frac{1}{2}\right)$ अंक निर्धारित है। इस खण्ड के सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

Fill in the blanks :

रिक्त स्थान भरिए :

1. If $\phi = x^2y + 2xy + z^2$, then curl (grad ϕ) = ...

यदि $\phi = x^2y + 2xy + z^2$, तो curl (grad ϕ) = ... ।

2. $\int_0^1 [t\,\hat{i} + (t^2 - 2t)\,\hat{j}]\,dt =$ ....

3. If $f(x) = x^{(-4)}$, then for $h = 1$, $f(x) =$ ....

यदि $f(x) = x^{(-4)}$, तो $h = 1$ के लिए $f(x) =$ .... ।

4. $(1 + \Delta)(1 - \nabla) \equiv$ ....

5. $\underset{b}{\Delta}\left(\frac{1}{a}\right) =$ ....

6. The interval is divided into .... (even/odd) number of intervals while applying Simpson's $\frac{1}{3}$rd rule of numerical integration.

सिम्पसन नियम द्वारा संख्यात्मक समाकलन ज्ञात करते समय दिये गये अन्तराल को .... (सम/विषम) संख्या में विभाजित करते हैं।

7. Newton-Raphson formula = ...

न्यूटन-रैफ्सन सूत्र = ... ।

8. For the differential equation $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$; $y(x_0) = y_0$ is known as ....

अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ के लिए $y(x_0) = y_0$ एक .... कहलाता है।

9. $\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{a}) =$ ....

10. $\text{curl}\ \vec{r} =$ ....