

MT-04**Real Analysis & Metric Space**

(वास्तविक विश्लेषण एवं दूरीक समष्टि)

Bachelor of Science (BSC-12/16/17)

Second Year, Examination, 2018

Time : 3 Hours**Max. Marks : 40**

Note : This paper is of **forty (40)** marks containing **three (03)** Sections A, B and C. Learners are required to attempt the questions contained in these Sections according to the detailed instructions given therein.

नोट : यह प्रश्न पत्र चालीस (40) अंकों का है जो तीन (03) खण्डों 'क', 'ख' तथा 'ग' में विभाजित है। शिक्षार्थियों को इन खण्डों में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

Section-A / खण्ड-क**(Long Answer Type Questions) / (दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)**

Note : Section 'A' contains four (04) long answer type questions of nine and half ($9\frac{1}{2}$) marks each. Learners are required to answer two (02) questions only.

नोट : खण्ड 'क' में चार (04) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं।
प्रत्येक प्रश्न के लिए साढ़े नौ ($9\frac{1}{2}$) अंक निर्धारित हैं।
शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Show that the sequence $\langle x_n \rangle$ is convergent and find its limit, where :

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{4 + 3x_n}{3 + 2x_n}, \quad n \geq 1$$

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\langle x_n \rangle$ अभिसारी है तथा इसकी सीमा ज्ञात कीजिए, जहाँ $x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{4 + 3x_n}{3 + 2x_n}, \quad n \geq 1$ है।

2. State and prove Rolle's theorem.
रोली प्रमेय का कथन लिखिए तथा उसे सिद्ध कीजिए।
3. If $f(x)$ is a function defined on $\left[0, \frac{1}{4}\pi\right]$ by :

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{if } x \text{ is rational} \\ \sin x, & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

Show that f is not Riemann integrable over $\left[0, \frac{1}{4}\pi\right]$.

यदि फलन $f(x)$, $\left[0, \frac{1}{4}\pi\right]$ पर निम्न प्रकार से परिभाषित है :

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{यदि } x \text{ परिमेय है} \\ \sin x, & \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$$

सिद्ध कीजिए कि f अन्तराल $\left[0, \frac{1}{4}\pi\right]$ पर रीमान समाकलनीय नहीं है।

4. Let (X, d) be a metric space and let :

$$d'(x, y) = \min \{1, d(x, y)\}$$

then d' is a metric for X .

यदि (X, d) एक दूरीक समष्टि है और यदि $d'(x, y) = \min \{1, d(x, y)\}$, तब d' , X के लिए दूरीक होगा।

Section-B / खण्ड-ख

(Short Answer Type Questions) / (लघु उत्तरीय प्रश्न)

Note : Section 'B' contains eight (08) short answer type questions of four (04) marks each. Learners are required to answer *four* (04) questions only.

नोट : खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए चार (04) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. State and prove Bolzano-Weierstrass theorem.
बोलजेनो-वाइस्ट्रास प्रमेय का कथन लिखिए तथा उसे सिद्ध कीजिए।
2. Every Cauchy's sequence is bounded.
प्रत्येक कोशी अनुक्रम परिबद्ध होती है।
3. Show that the function :

$$f(x) = |x| + |x - 1|$$

is continuous at $x = 0$ and 1 .

सिद्ध कीजिए कि फलन :

$$f(x) = |x| + |x - 1|$$

$x = 0$ तथा 1 पर सतत् है।

4. Show that the function :

$$\tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

is not continuous at $(0, 1)$.

सिद्ध कीजिए कि फलन :

$$\tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

$(0, 1)$ पर सतत् नहीं है।

5. Show that every constant function $f(x) = k$ is Riemann integrable and $\int_a^b k \, dx = k(b - a)$.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक स्थिरांक फलन $f(x) = k$ रीमान समाकलनीय होता है तथा $\int_a^b k \, dx = k(b - a)$ ।

6. Test the convergency of the series $\sum \frac{1}{1 + n^2 x}$ in $[1, \infty[$.

श्रेणी $\sum \frac{1}{1 + n^2 x}$ का अन्तराल $[1, \infty[$ में अभिसारी होने का परीक्षण कीजिए।

7. If (X, d) is a metric space, then show that :

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y) \quad \forall x, y, z \in X$$

यदि (X, d) एक दूरीक समष्टि है, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y) \quad \forall x, y, z \in X$$

8. If (X, d) is a metric space and A, B are subsets of X , then :

$$A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$$

यदि (X, d) एक दूरीक समष्टि है तथा A, B, X के उपसमुच्चय हैं, तब :

$$A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$$

Section-C / खण्ड-ग

(Objective Type Questions) / (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

Note : Section 'C' contains ten (10) objective type questions of half $(\frac{1}{2})$ mark each. All the questions of this Section are compulsory.

नोट : खण्ड 'ग' में दस (10) वस्तुनिष्ठ प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए आधा $(\frac{1}{2})$ अंक निर्धारित है। इस खण्ड के सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

Indicate whether the following statements are True or False :

इंगित कीजिए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य :

1. $|x| = \text{Max. } \{x, -x\} \quad \forall x \in \mathbb{R} .$ (True/False)

$|x| = \text{अधिकतम } \{x, -x\} \quad \forall x \in \mathbb{R} \mid$ (सत्य/असत्य)

2. ϕ is a closed set but not open set. (True/False)

ϕ एक संवृत समुच्चय है लेकिन विवृत समुच्चय नहीं है।
(सत्य/असत्य)

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 0.$ (True/False)

सीमा $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 0$ | (सत्य/असत्य)

4. Function $f(x) = x^3 + 3x$ is discontinuous at $x = 0$. (True/False)

फलन $f(x) = x^3 + 3x$, $x = 0$ पर असतत् है। (सत्य/असत्य)

5. If a function is differentiable at a point, then it must be continuous at that point. (True/False)

किसी बिन्दु पर अवकलनीय फलन उस बिन्दु पर सतत् भी होता है। (सत्य/असत्य)

6. Every monotonic function is Riemann integrable. (True/False)

प्रत्येक एकदिष्ट फलन रीमान समाकलनीय होता है। (सत्य/असत्य)

7. Series $\sum \frac{\sin x}{n^2}$ is convergent on set $\mathbb{R}$. (True/False)

श्रेणी $\sum \frac{\sin x}{n^2}$, समुच्चय $\mathbb{R}$ पर अभिसारी है। (सत्य/असत्य)

8. $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)$ does not exist. (True/False)

सीमा $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)$ अस्तित्व में नहीं है। (सत्य/असत्य)

9. In a metric space every space is open set. (True/False)
 एक दूरीक समष्टि में, प्रत्येक गोला एक विवृत समुच्चय होता है। (सत्य/असत्य)
10. If (X, d) is a metric space and A, B are subsets of X , then $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. (True/False)
 यदि (X, d) एक दूरीक समुच्चय है तथा A, B, X के उपसमुच्चय हैं, तब $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ । (सत्य/असत्य)