

S-683

Roll No.

MT-02

Calculus and Differential Equation

(कलन एवं अवकल समीकरण)

Bachelor of Science (BSC-12/16/17)

First Year, Examination, 2018

Time : 3 Hours

Max. Marks : 40

Note : This paper is of **forty (40)** marks containing **three (03)** Sections A, B and C. Learners are required to attempt the questions contained in these Sections according to the detailed instructions given therein.

नोट : यह प्रश्न पत्र चालीस (40) अंकों का है जो तीन (03) खण्डों 'क', 'ख' तथा 'ग' में विभाजित है। शिक्षार्थियों को इन खण्डों में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

Section-A / खण्ड-क

(Long Answer Type Questions) / (दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

Note : Section 'A' contains four (04) long answer type questions of nine and half ($9\frac{1}{2}$) marks each. Learners are required to answer *two* (02) questions only.

नोट : खण्ड 'क' में चार (04) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं।
प्रत्येक प्रश्न के लिए साढ़े नौ $(9\frac{1}{2})$ अंक निर्धारित हैं।
शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Prove that :

$$\sqrt{\frac{1}{n}} \sqrt{\frac{2}{n}} \sqrt{\frac{3}{n}} \dots \sqrt{\frac{(n-1)}{n}} = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}$$

where $n > 1$ and $n \in \mathbb{N}$.

सिद्ध कीजिए कि :

$$\sqrt{\frac{1}{n}} \sqrt{\frac{2}{n}} \sqrt{\frac{3}{n}} \dots \sqrt{\frac{(n-1)}{n}} = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}$$

जहाँ $n > 1$ तथा $n \in \mathbb{N}$ ।

2. Trace the following curve :

$$x = a (\theta + \sin \theta)$$

$$y = a (1 - \cos \theta)$$

निम्नलिखित वक्र का अनुरेखण कीजिए :

$$x = a (\theta + \sin \theta)$$

$$y = a (1 - \cos \theta)$$

3. Evaluate :

$$\iiint dx dy dz$$

where $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

$\iiint dx dy dz$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \mid$$

4. Find the envelope of the family of curves :

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1 \text{ if } a^n + b^n = c^n.$$

वक्र परिवार $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ का अन्वालोप ज्ञात कीजिए,

जबकि $a^n + b^n = c^n \mid$

Section-B / खण्ड-ख

(Short Answer Type Questions) / (लघु उत्तरीय प्रश्न)

Note : Section 'B' contains eight (08) short answer type questions of four (04) marks each. Learners are required to answer *four* (04) questions only.

नोट : खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए चार (04) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Find the Lagrange's form of remainder after n terms in the expansion of the function $f(x) = \log(1+x)$.

फलन $f(x) = \log(1+x)$ के प्रसार में n पदों के पश्चात् लाग्रान्ज शेष पद प्राप्त कीजिए।

2. Prove that the series $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\log n)^p}$ is convergent, if $p > 1$ and divergent if $p \leq 1$.

सिद्ध कीजिए कि श्रेणी $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\log n)^p}$ अभिसारी है, यदि $p > 1$ तथा अपसारी है यदि $p \leq 1$ ।

3. Prove that the radius of curvature at the point $(-2a, 2a)$ of the curve $x^2 y = a(x^2 + y^2)$ is $2a$.

सिद्ध कीजिए कि वक्र $x^2 y = a(x^2 + y^2)$ के बिन्दु $(-2a, 2a)$ पर वक्रता त्रिज्या $2a$ है।

4. If :

$$u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$$

then prove that :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 u = -\frac{9}{(x + y + z)^2}.$$

यदि :

$$u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$$

तो सिद्ध कीजिए :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 u = -\frac{9}{(x + y + z)^2}.$$

5. Solve :

$$(1 + y^2) dx = (\tan^{-1} y - x) dy$$

हल कीजिए :

$$(1 + y^2) dx = (\tan^{-1} y - x) dy$$

6. Find the volume of the solid of revolution obtained on revolving the curve $x = a \left(\cos t + \frac{1}{2} \log \tan^2 \frac{t}{2} \right)$, $y = a \sin t$ about its asymptote.

ब्रक्र $x = a \left(\cos t + \frac{1}{2} \log \tan^2 \frac{t}{2} \right)$, $y = a \sin t$ द्वारा

अपने अनन्तस्पर्शी के परितः परिक्रमण से जनित ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

7. Find the maximum and minimum value of the function $f(x, y) = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x + y)$ if $0 < x, y < \pi$.

फलन $f(x, y) = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x + y)$ के उच्चिष्ठ व निम्निष्ठ मान निकालिये, यदि $0 < x, y < \pi$ है।

8. Change the order of the integral

$$\int_0^{4a} \int_{\frac{x^2}{4a}}^{2\sqrt{ax}} f(x, y) dx dy .$$

समाकलन $\int_0^{4a} \int_{\frac{x^2}{4a}}^{2\sqrt{ax}} f(x, y) dx dy$ में समाकलन का क्रम

परिवर्तन कीजिए।

Section-C / खण्ड-ग

(Objective Type Questions) / (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

Note : Section 'C' contains ten (10) objective type questions of half ($\frac{1}{2}$) mark each. All the questions of this section are compulsory.

नोट : खण्ड 'ग' में दस (10) वस्तुनिष्ठ प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए आधा ($\frac{1}{2}$) अंक निर्धारित है। इस खण्ड के सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

Fill in the blanks.

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

- $\Gamma n \Gamma (1 - n) = \dots\dots\dots$, if $0 < n < 1$.

$\Gamma n \Gamma (1 - n) = \dots\dots\dots$, यदि $0 < n < 1$ ।
- Radius of curvature of a circle of radius a is $\dots\dots\dots$.

' a ' त्रिज्या वाले वृत्त की वक्रता त्रिज्या $\dots\dots\dots$ होगी।
- Condition for a double point to be a node is $\dots\dots\dots$.

द्विक बिन्दु नोड होने का प्रतिबन्ध है $\dots\dots\dots$ ।
- If $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, then the value of $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ is $\dots\dots\dots$.

यदि $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, तो $\frac{\partial \theta}{\partial x} =$ का मान $\dots\dots\dots$ होगा।
- $M dx + N dy = 0$ is an exact differential equation $\dots\dots\dots$.

$M dx + N dy = 0$ एक यथार्थ अवकल समीकरण है, यदि $\dots\dots\dots$ ।

6. If $f(x, y)$ is a homogenous function of degree n of two variables then :

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \dots\dots\dots$$

यदि $f(x, y)$ दो चर राशियों x व y की n घात की समघाती फलन हो तो :

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \dots\dots\dots$$

7. If ϕ is the angle between tangent and radius vector then $\tan \phi = \dots\dots\dots$.

यदि ध्रुवान्तर रेखा व स्पर्श रेखा के मध्य कोण ϕ हो तो $\tan \phi = \dots\dots\dots$ ।

8. The length of the arc of the curve $x = f(y)$ between $y = a$ and $y = b$, ($b > a$) is equal to $\dots\dots\dots$.

वक्र $x = f(y)$ पर कोटियों $y = a$ तथा $y = b$, ($b > a$) के मध्य चाप की लम्बाई = $\dots\dots\dots$ ।

9. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 x \cos^2 x dx = \dots\dots\dots$.

10. If ψ is the inclination of tangent to a curve with the positive direction of x -axis then $\frac{ds}{dx} = \dots\dots\dots$, where s is the length of the arc.

यदि वक्र के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा का x -अक्ष से धनात्मक दिशा में झुकाव ψ हो तो $\frac{ds}{dx} = \dots\dots\dots$, जहाँ s चाप की लम्बाई है।