Roll No. ……..

MT–08

Complex Analysis

(सम्मिश्र विश्लेषण)

Bachelor of Science (BSC–12/16)

MATHEMATCS

Third Year, Examination, 2017

Time : 3 Hours **Max. Marks : 30**

Note : This paper is of **thirty (30)** marks containing **three (03)** sections A, B and C. Learners are required to attempt the questions contained in these sections according to the detailed instructions given therein.

नोट : यह प्रश्न पत्र तीस (30) अंकों का है जो तीन (03) खण्डों 'क', 'ख' तथा 'ग' में विभाजित है। शिक्षार्थियों को इन खण्डों में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

Section–A / खण्ड–क

(Long Answer Type Questions) / (दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

Note : Section 'A' contains four (04) long answer type questions of seven and half $7\frac{1}{2}$ marks each. Learners are required to answer *two* (02) questions only.

नोट : खण्ड 'क' में चार (04) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए साढ़े सात $7\frac{1}{2}$ अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Show that the function :

   $u = \sin x.\cosh y + 2\cos x.\sinh y + x^2 - y^2 + 4xy$

   is a harmonic function and determine the corresponding analytic function $f(z) = u + iv$.

   दशाईये कि फलन :

   $u = \sin x.\cosh y + 2\cos x.\sinh y + x^2 - y^2 + 4xy$

   एक हार्मोनिक फलन है और इसके संगत् विश्लेषिक फलन निर्धारित कीजिए।

2. Show that the resultant (or product) of two bilinear transformation is a bilinear transformation.

   दशाईये कि दो द्विरैखिक रूपान्तरणों का परिणामी (या गुणन) एक द्विरैखिक रूपान्तरण है।

3. Evaluate :

$$\int_0^{\pi} \frac{a\, d\theta}{a^2 + \sin^2 \theta}$$

   where $a > 0$.

   मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi} \frac{a\, d\theta}{a^2 + \sin^2 \theta}$$

   जहाँ $a > 0$ दिया है।

4. If $f(z)$ is analytic within and on a closed contour C and if 'a' is any point within 'C', then show that :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - a)}\, dz$$

यदि $f(z)$ एक संवृत कन्टूर C के अन्दर तथा ऊपर विश्लेषिक फलन हो तथा 'a' वक्र 'C' के अन्दर एक बिन्दु हो, तो दशाईये कि :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)} dz$$

Section–B / खण्ड–ख

(Short Answer Type Questions) / (लघु उत्तरीय प्रश्न)

Note : Section 'B' contains eight (08) short answer type questions of two and half $2\frac{1}{2}$ marks each. Learners are required to answer *four* (04) questions only.

नोट : खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए ढाई $2\frac{1}{2}$ अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. If

$$u - v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$$

and $f(z) = u + iv$ is an analytic function of $z = x + iy$, find $f(z)$ in terms of z.

यदि :

$$u - v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$$

और फलन $f(z) = u + iv$, विश्लेषिक फलन हैं, तो z के पदों में फलन $f(z)$ का मान ज्ञात कीजिए।

2. Prove that an analytic function with constant real part of constant.

   दर्शाइये कि एक नियत वास्तविक भाग वाला विश्लेषिक फलन का मान नियत है।

3. Using Cauchy's integral formula, calculate $\int_C \frac{dz}{z(z+\pi i)}$, where C is $|z+3i|=1$.

   कौशी समाकलन सूत्र का उपयोग करते हुए $\int_C \frac{dz}{z(z+\pi i)}$ की गणना कीजिए, जहाँ C $|z+3i|=1$ को दर्शाता है।

4. Write a short note on analytic continuation.

   विश्लेषित सांतत्य पर एक सूक्ष्म टिप्पणी लिखिए।

5. Find the bilinear transformation which maps the points $z=0,-1,\infty$ into the points $w=-1,-2-i,i$ respectively.

   द्विरैखिक रूपान्तरण का मान ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $z=0,-1,\infty$ को क्रमश : $w=-1,-2-i,i$ में प्रतिचित्रित करता है।

6. Find residues of $\frac{z+1}{z^2(z-3)}$.

   $\frac{z+1}{z^2(z-3)}$ के अवशेषों का मान ज्ञात कीजिए।

7. Prove that : $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$

सिद्ध कीजिए कि : $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$

8. Find the radius of convergence of the power series :

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{2^n + 1}$$

and prove that $(2 - z)\, f(z) - 2 \to 0$ as $z \to 2$.

घात श्रेणी :

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{2^n + 1}$$

के अभिसारित त्रिज्या का मान बताइये तथा सिद्ध कीजिए कि $(2 - z)\, f(z) - 2 \to 0$ जब $z \to 2$ ।

Section–C / खण्ड–ग

(Objective Type Questions) / (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

Note : Section 'C' contains ten (10) objective type questions of half $\frac{1}{2}$ mark each. All the questions of this section are compulsory.

नोट : खण्ड 'ग' में दस (10) वस्तुनिष्ठ प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए आधा $\frac{1}{2}$ अंक निर्धारित है। इस खण्ड के सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

Fill in the blanks :

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

1. An analytic function with constant modulus is .....
एक नियत विश्लेषिक फलन का मापांक होगा .....

2. For any two complex numbers z_1, z_2, $|z_1 - z_2|$ is .....

   किसी भी दो सम्मिश्र संख्याओं z_1, z_2 के लिये $|z_1 - z_2|$ का मान होगा .....

3. Under the mapping $w = z + 2 - i$, the image of the line $x = 1$ is .....

   प्रतिचित्रण $w = z + 2 - i$ के अन्तर्गत, रेखा $x = 1$ का प्रतिबिम्ब होगा .....

4. The points where $f'(z) = 0$ or ∞ are called ..... points.

   वे बिन्दु जहाँ $f'(z) = 0$ या ∞ होता है, ... बिन्दु कहलाता है।

5. Residue of $\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$ at $z = -i$ is .....

   बिन्दु $z = -i$ पर $\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$ का अवशेष होगा ..... ।

Write T for True *or* F for False statements :

सत्य कथनों के लिये T अथवा असत्य कथनों के लिये F लिखिए :

6. $f(z) = \sin\frac{1}{z}$ has an isolated essential singularity at $z = 0$.

   फलन $f(z) = \sin\frac{1}{z}$ की तटस्थ मूलभूत विलक्षणता बिन्दु $z = 0$ पर है।

7. A pole of order one is a simple pole.
क्रम एक का ध्रुव, एक साधारण ध्रुव होता है।

8. $w = 2z$ is a bilinear transformation.
$w = 2z$ एक द्विरैखीय रूपान्तरण है।

9. The radius of convergence of the series $\Sigma 2^n z^{n!}$ is 'O'.
श्रेणी $\Sigma 2^n z^{n!}$ के अभिसरण की त्रिज्या 'O' है।

10. The function $f(z)$ defined by $f(z) = \frac{x^3 y (y - ix)}{x^6 + y^2}$, where $z \neq 0$ and $f(0) = 0$ is not differentiable at $z = 0$.
फलन $f(z) = \frac{x^3 y (y - ix)}{x^6 + y^2}$ द्वारा परिभाषित है, जहाँ $z \neq 0$ और $f(0) = 0$, बिन्दु $z = 0$ पर अवकलनीय नहीं है।