Roll No. …………………..

MT–07

Algebra

(बीजगणित)

Bachelor of Science (BSC–12/16) MATHEMATICS

Third Year, Examination, 2017

Time : 3 Hours **Max. Marks : 30**

Note : This paper is of **thirty (30)** marks containing **three (3)** sections A, B and C. Learners are required to attempt the questions contained in these sections according to the detailed instructions given therein.

नोट : यह प्रश्न पत्र तीस (30) अंकों का है जो तीन (03) खण्डों 'क', 'ख' तथा 'ग' में विभाजित है। शिक्षार्थियों को इन खण्डों में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

Section–A / खण्ड–क

(Long Answer Type Questions) / (दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

Note : Section 'A' contains four (04) long answer type questions of seven and half $7\frac{1}{2}$ marks each. Learners are required to answer *two* (02) questions only.

नोट : खण्ड 'क' में चार (04) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए साढ़े सात $7\frac{1}{2}$ अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Prove that a permutation cannot be both even or odd.

   सिद्ध कीजिये कि क्रमचय, सम और विषम दोनों नहीं हो सकता।

2. Find the solution of the equation $abxax = cbx$ in a group G, where a, b and c are given elements of G.

   एक समूह G में समीकरण $abxax = cbx$ का हल निकालिये, जहाँ a, b और c समूह G के अवयव हैं।

3. Show that the infinite set $S = \{1, x, x^2, x^3, ..., x^n, ...\}$ is a basic of the vector space F(X) of poynomial of the field F.

   दिखाइये कि अपरिमित समुच्चय $S = \{1, x, x^2, x^3, ..., x^n, ...\}$ क्षेत्र F का बहुपद का सदिश समष्टि F(X) का आधार है।

4. Prove that every independent subset of a finitely generated vector space V(F) is either a basis or can be expressed to form a basis of V.

   सिद्ध कीजिये कि परिमित रूप से उत्पन्न सदिश समिष्टि V(F) का प्रत्येक स्वतंत्र उपसमुच्चय या तो आधार होता है या आधार को बनाने के रूप में व्यक्त किया जाता है।

Section–B / खण्ड–ख

(Short Answer Type Questions) / (लघु उत्तरीय प्रश्न)

Note : Section 'B' contains eight (08) short answer type questions of two and half $2\frac{1}{2}$ marks each. Learners are required to answer *four* (04) questions only.

नोट : खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए ढाई $2\frac{1}{2}$ अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Prove that if for every element a in a group G, $a^2 = e$, then G is an Abelian group.

   सिद्ध कीजिये कि एक समूह G के प्रत्येक अवयव a जिसके लिये $a^2 = e$ हो, तो G एक आबेली समूह होगा।

2. Define Homomorphism and Isomorphism with example.

   समकारिता और तुल्याकारिता को उदाहरण के साथ परिभाषित कीजिये।

3. Let R be the ring of integers under ordinary addition and multiplication. Let R' be the set of all even integers. Let us define multiplication in R' to be denoted * by the relation $a * b = ab/2$. Prove that R is isomorphic to R'.

   R एक पूर्ण संख्याओं का वलय है साधारण जोड़ और गुणन के अधीन। R' एक पूर्ण सम संख्याओं का समुच्चय है। R' में गुणन * से और सम्बद्ध $a * b = ab/2$ से दिखाया गया है। सिद्ध कीजिये कि R और R' में समकारिता का सम्बन्ध है।

4. Show that a field has no proper homomorphic image.

   दिखाइये कि किसी क्षेत्र की कोई निजी तुल्याकारित प्रतिबिम्ब नहीं होता।

5. If S, T are subset of V(F), then prove that :

$$L(S \cup T) = L(S) + L(T)$$

यदि S, T, V(F) के उपसमुच्चय हैं, तो सिद्ध कीजिये कि :

$$L(S \cup T) = L(S) + L(T)$$

6. Prove that the kernel of a homomorphism is a subspace.

सिद्ध कीजिये कि तुल्याकारिता की गुणजावलियाँ एक उप-समष्टि हैं।

7. Prove that every n-dimensional vector space V(F) is isomorphic to $V_n(F)$.

सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक-दिशित सदिश समष्टि V(F) समकारित होती है $V_n(F)$ से।

8. Prove that a system consisting of vectors :

$$e_1 = (1, 0, 0, ..., 0)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ...$$

$$e_n = (0, 0, 0, ..., 1)$$

is a basis of $V_n(F)$.

सिद्ध कीजिये कि एक प्रबंध जिसमें सदिश :

$$e_1 = (1, 0, 0, ..., 0)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ...$$

$$e_n = (0, 0, 0, ..., 1)$$

हैं, $V_n(F)$ का आधार होगा।

Section–C / खण्ड–ग

(Objective Type Questions) / (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

Note : Section 'C' contains ten (10) objective type questions of half $\frac{1}{2}$ mark each. All the questions of this section are compulsory.

नोट : खण्ड 'ग' में दस (10) वस्तुनिष्ठ प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए आधा $\frac{1}{2}$ अंक निर्धारित है। इस खण्ड के सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

1. Every group of prime order is ....

   प्रत्येक अभाज्य कोटि का समूह होता है .... ।

2. The identity element of the quotient group G/H is ....

   विभाग समूह G/H का इकाई अवयव होता है .... ।

3. Any subgroup H of a group G is normal if for all $x \in G$, we have :

   (a) $Hx = xH$

   (b) $Hx \neq xH$

   (c) $Hx = H$

   (d) $xHx^{-1} = xH$

   किसी समूह G का उपसमूह प्रसामान्य होता है यदि प्रत्येक $x \in G$, के लिये :

   (अ) $Hx = xH$

   (ब) $Hx \neq xH$

   (स) $Hx = H$

   (द) $xHx^{-1} = xH$

4. If G is finite group and H is a normal subgroup of G, then o(G/H) is equal to :

   (a) o (G)

   (b) o (H)

   (c) o (G)/o (H)

   (d) None of these

   यदि G एक नियत समूह है तथा H उसका प्रसामान्य उपसमूह है तो o (G/H) बराबर होगा :

   (अ) o (G)

   (ब) o (H)

   (स) o (G)/o (H)

   (द) इनमें से कोई नहीं

5. Every subgroup of an abelian group is normal.

   (True/False)

   आबेली समूह का प्रत्येक उपसमूह प्रसामान्य होता है।

   (सत्य / असत्य)

6. A subring of any field is a field. (True/False)

   किसी क्षेत्र का उपवलय क्षेत्र होता है। (सत्य / असत्य)

7. In a field F, if $ab = 0$, then we must have $ba = 0$.

   (True/False)

   यदि किसी क्षेत्र F में $ab = 0$, तो $ba = 0$ आवश्यक है।

   (सत्य / असत्य)

8. A ring R is commutative ring if $a + b = b + a$, for all a, b in R. (True/False)

एक वलय क्रमविनिमेय वलय होगा यदि प्रत्येक a, b जो R में है लिये यदि $a+b=b+a$ होगा। (सत्य / असत्य)

9. In a ring of 2×2 matrices over the field of a real number, the zero element of the ring of matrices is the matrix :

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2×2 सारणिकों का वलय जो कि वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र के ऊपर है, के लिये सारणिकों के वलय के लिये शून्य अवयव वाला सारणिक होगा :

(अ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(ब) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(स) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(द) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

10. In the ring $(\{0, 1, 2, 3, 4\}, +_5, \times_5)$, the additive inverse of 2 is :

(a) 1

(b) 4

(c) 3

(d) 2

वलय $(\{0, 1, 2, 3, 4\}, +_5, \times_5)$ में 2 का योज्य प्रतिलोम होगा :

(अ) 1

(ब) 4

(स) 3

(द) 2