Roll No. …………………..

MT–04

Real Analysis & Metric Space

(वास्तविक विश्लेषण एवं दूरीक समष्टि)

Bachelor of Science (BSC–12/16)
MATHEMATICS

Second Year, Examination, 2017

Time : 3 Hours **Max. Marks : 30**

Note : This paper is of **thirty (30)** marks containing **three (03)** sections A, B and C. Learners are required to attempt the questions contained in these sections according to the detailed instructions given therein.

नोट : यह प्रश्न पत्र तीस (30) अंकों का है जो तीन (03) खण्डों 'क', 'ख' तथा 'ग' में विभाजित है। शिक्षार्थियों को इन खण्डों में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

Section–A / खण्ड–क

(Long Answer Type Questions) / (दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

Note : Section 'A' contains four (04) long answer type questions of seven and half $7\frac{1}{2}$ marks each. Learners are required to answer *two* (02) questions only.

नोट : खण्ड ‘क’ में चार (04) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए साढ़े सात $7\frac{1}{2}$ अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Every infinite bounded set of real numbers has a limit point.

   प्रत्येक अपरिमित परिबद्ध समुच्चय का कम से कम एक सीमा बिन्दु होता है।

2. Show that the sequence x_n defined by $x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ converges to 2.

   सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम x_n , 2 पर अभिसृत होगी जहाँ $x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ है।

3. Let $f \in \mathrm{R}\ \ a, b$, then the function F defined on a, b by $\mathrm{F}\ \ x\ \ = \int_a^x f\ \ t\ \ dt$ is continuous on a, b .

   यदि $f \in \mathrm{R}\ \ a, b$, तब a, b में f का समाकलन फलन $\mathrm{F}\ \ x\ \ = \int_a^x f\ \ t\ \ dt \quad a, b$ पर सतत् होता है।

4. If X, d is a metric space and D defined on X as

   $$\mathrm{D}\ \ x, y\ \ = \frac{d\ \ x, y}{1 + d\ \ x, y} \forall\ \ x, y \in x.$$

   Then show that (X, D) is a metric space.

यदि (X, d) एक दूरीक समष्टि है तथा D, X पर निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$D(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \forall (x, y) \in x$$

प्रदर्शित कीजिए कि (X, D) एक दूरीक समष्टि है।

Section–B / खण्ड–ख

(Short Answer Type Questions) / (लघु उत्तरीय प्रश्न)

Note : Section 'B' contains eight (08) short answer type questions of two and half $\left(2\frac{1}{2}\right)$ marks each. Learners are required to answer *four* (04) questions only.

नोट : खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए ढाई $\left(2\frac{1}{2}\right)$ अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. A closed interval [*a*, *b*] is neighbourhood of each of its points except the two end points *a* and *b*.

   एक संवृत अन्तराल $[a, b]$ अपने अन्त अवयव a और b के अतिरिक्त प्रत्येक अवयव का प्रतिवेश होता है।

2. Every cauchy sequence is bounded.

   प्रत्येक कोशी अनुक्रम परिबद्ध होता है।

3. Show that the function $f(x) = |x| + |x-1|$ is continuous at $x = 0$ and 1.

सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = |x| + |x-1|$ए $x = 0$ और 1 पर सतत् है।

4. Verify Rolle's theorem for the function $f(x) = 8x - x^2$ in $[2, 6]$.

$[2, 6]$ में फलन $f(x) = 8x - x^2$ के लिए रोल प्रमेय का परीक्षण कीजिए।

5. Show that the function

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y^3 x}{x^2 + y^6} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

is discontinuous at origin.

सिद्ध कीजिए कि फलन

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y^3 x}{x^2 + y^6} & \text{यदि } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{यदि } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

मूल बिन्दु पर असतत् है।

6. Show that the series $\Sigma \dfrac{1}{1 + n^2 x}$ is uniform convergent in $[1, \infty[$.

सिद्ध कीजिए कि श्रेणी $\Sigma \dfrac{1}{1 + n^2 x}$ $[1, \infty[$ में एकसमान अभिसारी है।

7. Define :
   (i) Pseudo metric
   (ii) Diameter of a set

   परिभाषित कीजिए :
   (i) छ्दम दूरीक
   (ii) समुच्चय का व्यास

8. If (X, d) is a metric space and A, B are any *two* subsets of X, then show that $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.

   यदि (X, d) एक दूरी का समष्टि है तथा A, B, X के कोई दो उपसमुच्चय हैं, तब सिद्ध कीजिए कि

$$\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$$

Section–C / खण्ड–ग

(Objective Type Questions) / (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

Note : Section 'C' contains ten (10) objective type questions of half $\left(\frac{1}{2}\right)$ mark each. All the questions of this section are compulsory.

नोट : खण्ड 'ग' में दस (10) वस्तुनिष्ठ प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए आधा $\left(\frac{1}{2}\right)$ अंक निर्धारित है। इस खण्ड के सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

Write T for True and F for False statement.

सही कथन के लिए T और असत्य कथन के लिए F लिखिये।

1. Set of rational numbers is an Archimedean ordered field.

   परिमेय संख्याओं का समुच्चय आर्किमिडीय क्रमित क्षेत्र होता है।

2. Set of real numbers is a compact set.
वास्तविक संख्याओं का समुच्चय संहत समुच्चय होता है।

3. $f(x) = e^{2x}, x \in \mathrm{R}$ is not differentiable in R.

$f(x) = e^{2x}, x \in \mathrm{R}$, R में अवकलनीय नहीं है।

4. Every bounded function is Riemann integrable.
प्रत्येक परिबद्ध फलन रीमान समाकलनीय होता है।

5. Prove that :

$$\int_0^1 \left[3x^2 \cos\frac{1}{x^2} + 2\sin\frac{1}{x^2} \right] dx = \cos 1$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^1 \left[3x^2 \cos\frac{1}{x^2} + 2\sin\frac{1}{x^2} \right] dx = \cos 1$$

6. Series $\sum \frac{x^h}{n^2}$ is uniform convergent in $[0,1]$.

श्रेणी $\sum \frac{x^h}{n^2}$, $[0,1]$ में एकसमान अभिसारी है।

7. Prove that :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = 0$$

सिद्ध कीजिए :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = 0$$

8. If (X, d) is a metric space then

$$|d(x,z) - d(y,z)| \geq d(x,y) \; \forall x, y, z \in \mathrm{X}.$$

यदि X,d एक दूरीक समष्टि है तब

$$| d \quad x,z \quad - d \quad y,z \quad | \geq d \quad x,y \quad \forall x,y,z \in X \; |$$

9. Every metric space is pseudo matric space.
   प्रत्येक दूरीक समष्टि, छदम दूरीक समष्टि होता है।

10. Singleton subset x of a metric space X is connected.
    एक दूरीक समष्टि X का एकल उपसमुच्चय x सम्बद्ध होता है।