

Roll No.

MT-02

Calculus and Differential Equation

(कलन एवं अवकल समीकरण)

Bachelor of Science (BSC-12/16) MATHEMATICS

First Year, Examination, 2017

Time : 3 Hours

Max. Marks : 35

Note : This paper is of **thirty five (35)** marks containing **three (3)** sections A, B and C. Learners are required to attempt the questions contained in these sections according to the detailed instructions given therein.

नोट : यह प्रश्न पत्र पैंतीस (35) अंकों का है जो तीन (03) खण्डों 'क', 'ख' तथा 'ग' में विभाजित है। शिक्षार्थियों को इन खण्डों में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

Section-A / खण्ड-क

(Long Answer Type Questions) / (दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

Note : Section 'A' contains four (04) long answer type questions of seven and half ($7\frac{1}{2}$) marks each. Learners are required to answer *two* (02) questions only.

नोट : खण्ड 'क' में चार (04) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं।
प्रत्येक प्रश्न के लिए साढ़े सात ($7\frac{1}{2}$) अंक निर्धारित हैं।
शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो (02) प्रश्नों के उत्तर देने
हैं।

1. Prove that :

$$\Gamma m \Gamma \left(m + \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}} \Gamma(2m)$$

सिद्ध कीजिए :

$$\Gamma m \Gamma \left(m + \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}} \Gamma(2m)$$

2. With the help of mean value theorem, show that if

$$x > 0, \text{ then } \log_{10}(x+1) = \frac{x \log_{10} e}{1 + \theta x} \text{ where } 0 < \theta < 1.$$

मध्य मान प्रमेय की सहायता से दिखाइये कि यदि $x > 0$,

$$\text{तब } \log_{10}(x+1) = \frac{x \log_{10} e}{1 + \theta x} \text{ जहाँ } 0 < \theta < 1 |$$

3. Test the convergence of the series :

$$\frac{(\log 2)^2}{2^2} + \frac{(\log 3)^2}{3^2} + \frac{(\log 4)^2}{4^2} + \dots + \frac{(\log n)^2}{n^2} + \dots \infty$$

श्रेणी के अभिसरण का परीक्षण कीजिए :

$$\frac{(\log 2)^2}{2^2} + \frac{(\log 3)^2}{3^2} + \frac{(\log 4)^2}{4^2} + \dots + \frac{(\log n)^2}{n^2} + \dots \infty$$

4. Find the envelope of the family of circle :

$$x^2 + y^2 - 2ax \cos \theta - 2ay \sin \theta = c^2$$

where θ is parameter.

वृत्तों के परिवार का अन्वालोप ज्ञात कीजिए :

$$x^2 + y^2 - 2ax \cos \theta - 2ay \sin \theta = c^2$$

जहाँ θ चर है।

Section-B / खण्ड-ख

(Short Answer Type Questions) / (लघु उत्तरीय प्रश्न)

Note : Section 'B' contains eight (08) short answer type questions of two and half $2\frac{1}{2}$ marks each.

Learners are required to answer six (06) questions only.

नोट : खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए ढाई $2\frac{1}{2}$ अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल छः (06) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Solve the differential equation :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 3}{2x + 2y + 7}$$

अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 3}{2x + 2y + 7}$$

2. Prove that :

$$\int_0^a x^3(2ax - x^2)^{3/2} dx = \left(\frac{9\pi}{32} - \frac{22}{35} \right) a^7$$

सिद्ध कीजिए :

$$\int_0^a x^3(2ax - x^2)^{3/2} dx = \left(\frac{9\pi}{32} - \frac{22}{35} \right) a^7$$

3. Integrate :

$$\iiint x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} dx dy dz$$

where $x, y, z > 0$ and $\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r \leq 1$.

समाकलन कीजिए :

$$\iiint x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} dx dy dz$$

जबकि $x, y, z > 0$ एवं $\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r \leq 1$ ।

4. Evaluate the limit :

$$\text{Lt.}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{3n}$$

सीमा ज्ञात कीजिए :

$$\text{Lt.}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{3n}$$

5. Find the radius of curvature at the point $(-2a, 2a)$ of the curve $x^2 y = a(x^2 + y^2)$, $a > 0$.

वक्र $x^2 y = a(x^2 + y^2)$, $a > 0$ के बिन्दु $(-2a, 2a)$ पर वक्रता त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

6. Trace the curve :

$$x = a(t + \sin t)$$

$$y = a(1 - \cos t)$$

वक्र का अनुरेखण कीजिए :

$$x = a(t + \sin t)$$

$$y = a(1 - \cos t)$$

7. Find the length of the curve $y = \log \left[\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right]$ from $x = 1$ to $x = 2$.

वक्र $y = \log \left[\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right]$ की लम्बाई $x = 1$ से $x = 2$ तक ज्ञात कीजिए।

8. Solve the differential equation :

$$\frac{dy}{dx} - \frac{\tan y}{1+x} = (1+x)e^x \sec y$$

अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} - \frac{\tan y}{1+x} = (1+x)e^x \sec y$$

Section-C / खण्ड-ग

(Objective Type Questions) / (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

Note : Section 'C' contains five (05) objective type questions of one (01) mark each. All the questions of this section are compulsory.

नोट : खण्ड 'ग' में पाँच (05) वस्तुनिष्ठ प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए एक (01) अंक निर्धारित है। इस खण्ड के सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

Fill in the blanks.

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

1.
$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} = \dots\dots\dots$$

2. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \sin^4 x \, dx = \dots\dots\dots$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \frac{1}{1 + \frac{2r}{n}} = \dots\dots\dots$

4. $\frac{\partial}{\partial r} (r^{\theta \log r}) = \dots\dots\dots$

5. Integrating factor of differential equation $\frac{dy}{dx} + \frac{d}{x} y = x^3$ is $\dots\dots\dots$

अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y = x^3$ का इन्टीग्रेटिंग फ़ैक्टर $\dots\dots\dots$ है।