

**C171**

Total Pages : 6

Roll No. ....

**MT-08**

**Complex Analysis**

**समिश्र विश्लेषण**

Bachelor of Science (BSC)/Bachelor of Arts (BA)

3rd Year Examination, 2022 (June)

**Time : 2 Hours]**

**[Max. Marks : 40**

**Note :** This paper is of Forty (40) marks divided into two (02) Sections A and B. Attempt the questions contained in these sections according to the detailed instructions given therein.

**नोट :** यह प्रश्नपत्र चालीस (40) अंकों का है जो दो (02) खण्डों के तथा ख में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों को हल करना है।

**SECTION-A/( खण्ड-क )**

**(Long Answer Type Questions)/( दीर्घ उत्तरों वाले प्रश्न )**

**Note :** Section 'A' contains Five (05) long answer type questions of Ten (10) marks each. Learners are required to answer any Two (02) questions only.

(2×10=20)

**C171 /MT-08**

**[P.T.O.**

**नोट :** खण्ड 'क' में पाँच (05) दीर्घ उत्तरों वाले प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए दस (10) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. If  $f(z)$  is analytic within and on a closed contour  $C$ , and if  $a$  is any point within  $C$  then prove that

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

यदि एक संवृत कंटूर  $C$  के अंदर तथा बाहर विश्लेषिक फलन तथा  $a$  वक्र  $C$  के अंदर एक बिंदु हो तो सिद्ध कीजिए।

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

2. State and prove Liouville's theorem.

ल्यूवेल प्रमेय को कथन सहित सिद्ध करें।

3. Define Cauchy residue theorem. Find the residues of

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)} \quad \text{at } z = 1, 2, 3, \dots, \infty \text{ and}$$

show that their sum is zero.

कोशी अवशेष प्रमेय को परिभाषित करें। फलन

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)} \quad z = 1, 2, 3, \dots, \infty \text{ पर अवशेष}$$

ज्ञात कीजिये तथा प्रदर्शित कीजिये कि उनका योग शून्य है।

4. Using the contour integration show that

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a \cos \theta}{a + \cos \theta} d\theta = 2\pi a \left\{ 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 - 1}} \right\}, a > 1$$

परिरेखा समाकलन द्वारा सिद्ध कीजिए।

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a \cos \theta}{a + \cos \theta} d\theta = 2\pi a \left\{ 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 - 1}} \right\}, a > 1$$

5. State and prove Maximum Modulus Theorem.

महत्तम मापांक प्रमेय को कथन सहित सिद्ध कीजिए।

### SECTION-B/( खण्ड-ख )

(Short Answer Type Questions)/( लघु उत्तरों वाले प्रश्न )

**Note :** Section 'B' contains Eight (08) short answer type questions of Five (05) marks each. Learners are required to answer any Four (04) questions only. (4×5=20)

**नोट :** खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरों वाले प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए पाँच (05) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

**1.** Express the following Complex number in polar form.

निम्न समिश्र संख्याओं को ध्रुवीय रूप में व्यक्त कीजिए।

(a)  $2 + 2\sqrt{3}$

(b)  $-5 + 5i$

(c)  $-\sqrt{6} - \sqrt{2}i$

(d)  $3i$ .

**2.** Define the following :

(a) Neighborhood.

(b) Limit point.

(c) Interior, Exterior and boundary points.

(d) Derived and Closure of a set.

निम्न को परिभाषित कीजिए :

(क) प्रतिवेश।

(ख) सीमा बिंदु।

(ग) आंतरिक पहाड़ तथा परिसीमा बिंदु।

(घ) व्युत्पन्न एवं संवरक समुच्चय।

3. Prove that  $\lim_{z \rightarrow i} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} = 4 + 4i$ .

सिद्ध कीजिए  $\lim_{z \rightarrow i} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} = 4 + 4i$ .

4. Prove that the function  $f(z) = u + iv$ , where

$$f(z) = \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2 + y^2}, z = 0, f(0) = 0$$

is continuous and that Cauchy-Riemann equations are satisfied at the origin yet  $f'(z)$  does not exist at  $z = 0$ .

सिद्ध कीजिए कि फलन

$$f(z) = \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2 + y^2}, z = 0, f(0) = 0$$

सतत है तथा मूल बिन्दु पर कोशी-रीमान समीकरण संतुष्ट है यद्यपि  $f'(z)$  का अस्तित्व मूल बिन्दु पर नहीं है।

5. Show that the series  $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots$  absolutely

and uniformly convergent.

दर्शाइए कि श्रेणी  $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots$  निरपेक्ष तथा एक

समान अभिसारी है।

6. Find the bilinear transformation that maps the points  $z_1 = \infty, z_2 = i, z_3 = 0$  into the points  $w_1 = 0, w_2 = i$  and  $w_3 = \infty$ .

वह द्विरैखिक रूपांतरण ज्ञात कीजिए जो बिंदुओं

$z_1 = \infty, z_2 = i, z_3 = 0$  को  $w_1 = 0, w_2 = i$  और  $w_3 = \infty$  में प्रति चित्रित करें।

7. Find the value  $\int_C (z^2 + 3z + 2) dz$ .

मान ज्ञात कीजिए  $\int_C (z^2 + 3z + 2) dz$ .

8. Prove that :

सिद्ध कीजिए :

(a)  $\frac{d}{dz} (\sin z) = \cos z$ .

(b)  $\frac{d}{dx} (\cos z) = -\sin z$ .

---