C170

Total Pages : 6 Roll No. ....

MT-07

Algebra

बीजगणित

Bachelor of Science (BSC)

3rd Year Examination, 2022 (June)

Time : 2 Hours] **[Max. Marks : 40**

Note : This paper is of Forty (40) marks divided into two (02) Sections A and B. Attempt the questions contained in these sections according to the detailed instructions given therein.

नोट : यह प्रश्नपत्र चालीस (40) अंकों का है जो दो (02) खण्डों क तथा ख में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों को हल करना है।

SECTION–A/(खण्ड-क)

(Long Answer Type Questions)/(दीर्घ उत्तरों वाले प्रश्न)

Note : Section 'A' contains Five (05) long answer type questions of Ten (10) marks each. Learners are required to answer any Two (02) questions only.

(2×10=20)

नोट : खण्ड 'क' में पाँच (05) दीर्घ उत्तरों वाले प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए दस (10) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. If a and b are the element of the group G such that $a^5 = e$ and $aba^{-1} = b^2$, then find the order of the element.

यदि समूह G में a और b ऐसे अवयव हैं कि $a^5 = e$ तथा $aba^{-1} = b^2$, तो b की कोटि ज्ञात कीजिये।

2. State and proof the Lagrange's theorem with example.

लेग्रेंज प्रमेय की कथन सहित व्याख्या कीजिये तथा उदाहरण भी दीजिये।

3. If $f : G \to G'$, is a homomorphism from the group (G, *) to the group (G, *) and e and e' respectively are the identity of G and G′ then proof the following :

यदि $f : G \to G'$, समूह (G, *) से समूह (G, *) में समाकारिता हो, एवं e और e' क्रमशः समूह G एवं G′ के तत्समक अवयव है तो सिद्ध कीजिये कि:

(a) $f(e) = e'$

(b) $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}, \forall\ \alpha \in G$

(c) $f(a^n) = [f(a)]^n, \forall\ \alpha \in G, n \in Z$

4. Prove that the set $W = \{(a, b, c) | a - 3b + 4c = 0; a, b, c \in F\}$ is the vector subspace of the vector space $V(F) = \{(a, b, c) | a, b, c \in F\}$.

प्रदर्शित कीजिए कि समुच्च्य $W = \{(a, b, c) | a - 3b + 4c = 0; a, b, c \in F\}$ सदिश समष्टि $V(F) = \{(a, b, c) | a, b, c \in F\}$ की एक उपसमष्टि है।

5. If W_1 and W_2 are vector subspaces of the finite vector space $V(F)$, then prove that $\text{Dim}(W_1 + W_2) = \text{Dim}(W_1) + \text{Dim}(W_2) - \text{Dim}(W_1 \cap W_2)$.

यदि W_1 एवं W_2 किसी परिमित विमीय सदिश समष्टि $V(F)$ की दो उपसमष्टियां हों, तो सिद्ध कीजिए कि $\text{Dim}(W_1 + W_2) = \text{Dim}(W_1) + \text{Dim}(W_2) - \text{Dim}(W_1 \cap W_2)$.

SECTION–B/(खण्ड-ख)

(Short Answer Type Questions)/(लघु उत्तरों वाले प्रश्न)

Note : Section 'B' contains Eight (08) short answer type questions of Five (05) marks each. Learners are required to answer any Four (04) questions only. (4×5=20)

नोट : खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरों वाले प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए पाँच (05) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Prove that intersection of two subgroup of a group G is also a subgroup of G.

किसी समूह G के दो उपसमूहों का सर्वानिष्ट भी G का उपसमूह होता है।

2. Find the value of $\alpha^{-1}\beta\alpha$ where

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 1 & 8 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

निम्नलिखित α तथा β से $\alpha^{-1}\beta\alpha$ का मान ज्ञात कीजिये जहाँ

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 1 & 8 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Prove that infinite cyclic group has two generators.

सिद्ध करो कि अपरिमित चक्रीय समूह के दो और केवल दो जनक होते हैं।

4. Prove that centre of group Z(G) is the normal subgroup of the group G.

सिद्ध कीजिये कि समूह G का केन्द्र Z(G) का प्रसामान्य उपसमूह होता है।

5. Prove that $(Z_5, +_5, \times_5)$ is an integral domain. Is it also a field ?

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $(Z_5, +_5, \times_5)$ एक पूर्णांकीय प्रान्त है। क्या यह क्षेत्र भी है?

6. Prove that for every prime number (p) field $(\mathbb{Z}_p, +_p, \times_p)$ is a prime field.

प्रत्येक अभाज्य संख्या (p) के लिये क्षेत्र $(\mathbb{Z}_p, +_p, \times_p)$ अभाज्य क्षेत्र होता है।

7. Prove that the vectors $v_1 = (6, 2, 3, 4)$, $v_2 = (0, 5, -3, 1)$ and $v_3 = (0, 0, 7, -2)$ of the vector space $V(R) = \{(a_1, a_2, a_3, a_4 | a_1, a_2, a_3, a_4 \in R)\}$ are linearly independent.

सदिश समष्टि $V(R) = \{(a_1, a_2, a_3, a_4 | a_1, a_2, a_3, a_4 \in R)\}$ में सदिश $v_1 = (6, 2, 3, 4)$, $v_2 = (0, 5, -3, 1)$ तथा $v_3 = (0, 0, 7, -2)$ एकघाततः स्वतन्त्र हैं।

8. Show that every subgroup of the Quaternion group $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k \mid i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k, jk = i, ki = j\}$, are normal subgroup.

सिद्ध कीजिए कि चतुष्ट्य समूह $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k \mid i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k, jk = i, ki = j\}$, का प्रत्येक उपसमूह एक प्रसामान्य उपसमूह है।