C167

Total Pages : 4 Roll No. ....

MT-04

Real Analysis and Metric Space

वास्तविक विश्लेषण एवं दूरिक समष्ठी

Bachelor of Science (BSC-12/16/17)

2nd Year Examination, 2022 (June)

Time : 2 Hours] **[Max. Marks : 40**

Note : This paper is of Forty (40) marks divided into two (02) Sections A and B. Attempt the questions contained in these sections according to the detailed instructions given therein.

नोट : यह प्रश्नपत्र चालीस (40) अंकों का है जो दो (02) खण्डों क तथा ख में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों को हल करना है।

SECTION–A/(खण्ड-क)

(Long Answer Type Questions)/(दीर्घ उत्तरों वाले प्रश्न)

Note : Section 'A' contains Five (05) long answer type questions of Ten (10) marks each. Learners are required to answer any Two (02) questions only.

(2×10=20)

नोट : खण्ड 'क' में पाँच (05) दीर्घ उत्तरों वाले प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए दस (10) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. State and prove Bolzano Weierstrass Theorem for sequence.

बोलजानो वाइरस्ट्रास प्रमेय अनुक्रम के लिए का उल्लेख कीजिए और सिद्ध कीजिए।

2. State and prove Darboux Theorem.

डार्बू प्रमेय का उल्लेख कीजिए और सिद्ध कीजिए।

3. State and prove Rolle's Theorem.

रोल प्रमेय का उल्लेख कीजिए और सिद्ध कीजिए।

4. Find the value of

मान ज्ञात कीजिए

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}.$$

5. Let (X, d) be any metric space and let k be a fixed positive real number. For $x, y, \in$ X, defined $d^*(x, y) = kd(x, y)$. Prove that d^* is a metric on X.

मान लीजिए (X, d) कोई दूरिक समष्टि है और k एक निश्चित धनात्मक वास्तविक संख्या है। $x, y, \in$ X के लिए $d^*(x, y) = kd$ (x, y). सिद्ध कीजिए कि X पर एक दूरिक है।

SECTION–B/(खण्ड-ख)

(Short Answer Type Questions)/(लघु उत्तरों वाले प्रश्न)

Note : Section 'B' contains Eight (08) short answer type questions of Five (05) marks each. Learners are required to answer any Four (04) questions only. (4×5=20)

नोट : खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरों वाले प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए पाँच (05) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Write Archimedean property of real numbers and prove it.

वास्तविक संख्याओं का आर्किमिडीज गुण लिखिए और सिद्ध कीजिए।

2. Prove that the sequence $< \frac{1}{n} >$ converges to 0.

सिद्ध करें कि अनुक्रम $< \frac{1}{n} >$ अभिसरित होता है 0 में।

3. Show that

प्रदर्शित कीजिये

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n+1}\right) = 2.$$

4. Show that the sequence $< f_n >$, where $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$; $0 \le x \le 1$ is not uniformly convergent.

प्रदर्शित कीजिये कि अनुक्रम जहाँ $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$; $0 \le x \le 1$ एक समान रूप से अभिसारी नहीं है।

5. Prove that in a metric space (X, d) every convergent sequence is a Cauchy sequence.

दूरिक समष्टि में प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम एक कोशी अनुक्रम होता है।

6. A set is closed iff its complement is open.

एक समुच्य संवृत होगा यदि और केवल उसका पूरक विवृत है।

7. If A and B any two non-empty subsets of a metric space X. If $A \cap B \neq \varnothing$, then $d(A \cup B) \le d(A) + d(B)$.

यदि A और B दूरिक समष्टि X के दो अरिक्त उपसमुच्य हैं। यदि $A \cap B \neq \varnothing$ तब $d(A \cup B) \le d(A) + d(B)$.

8. Prove that the function $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ is continuous at origin, where $f(0, 0) = 0$.

सिद्ध करें कि फलन $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ मूल बिंदु पर संतत है, जहाँ $f(0, 0) = 0$.