564

Total Pages : 5 Roll No. ....

MT-07

Algebra

बीजगणित

Bachelor of Science (BSC-12/16)

Third Year Examination, 2021 (Winter)

Time : 2 Hours] **[Max. Marks : 40**

Note : This paper is of Forty (40) marks divided into two (02) Sections A and B. Attempt the questions contained in these sections according to the detailed instructions given therein.

नोट : यह प्रश्नपत्र चालीस (40) अंकों का है जो दो (02) खण्डों क तथा ख में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों को हल करना है।

SECTION–A/(खण्ड-क)

(Long Answer Type Questions)/(दीर्घ उत्तरों वाले प्रश्न)

Note : Section 'A' contains Five (05) long answer type questions of Ten (10) marks each. Learners are required to answer any Two (02) questions only.

(2×10=20)

नोट : खण्ड 'क' में पाँच (05) दीर्घ उत्तरों वाले प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए दस (10) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. State and Prove Lagrange's theorem.

लैग्रेंज की प्रमेय का कथन दीजिए एवं सिद्ध भी कीजिए।

2. Prove the every field is an Integral Domain but not Conversely.

सिद्ध कीजिए प्रत्येक क्षेत्र एक पूर्णांकित प्रान्त है लेकिन विपरीत सही नहीं है।

3. If W_1 and W_2 are subspaces of the vector space $V(f)$, then prove that

(a) $W_1 + W_2$ is subspace of $V(f)$.

(b) $W_1 + W_2 = \{W_1 \cup W_2\}$.

यदि W_1 और W_2 किसी सदिश समष्टि $V(f)$ के उपसमष्टियाँ हैं, तो सिद्ध कीजिए

(a) $W_1 + W_2$, $V(f)$ की उपसमष्टि है।

(b) $W_1 + W_2 = \{W_1 \cup W_2\}$.

4. Prove that every homomorphic image of a group G is isomorphic to some quotient group of G.

सिद्ध कीजिए प्रत्येक समूह G का सामकृतिक प्रतिबिम्ब G के किसी विभाग समूह के तुल्यकारी होता है।

5. Prove that every linearly independent subset of a finitely generated vector space V(*f*) is either a basic of V or can be extended to form a basis of V.

सिद्ध कीजिए किसी परिमित विमीय सदिश समष्टि V(*f*) का प्रत्येक एकघातत: स्वतन्त्र समुच्चय यदि V का आधार नहीं है तो उसको बढ़ाकर आधार बनाया जा सकता है।

SECTION–B/(खण्ड-ख)

(Short Answer Type Questions)/(लघु उत्तरों वाले प्रश्न)

Note : Section 'B' contains Eight (08) short answer type questions of Five (05) marks each. Learners are required to answer any Four (04) questions only. (4×5=20)

नोट : खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरों वाले प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए पाँच (05) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Define even and odd permutations with two examples.

सम एवं विषम क्रमचयों को दो उदाहरणों सहित समझाइये।

2. Prove that every group of prime order is cyclic.

सिद्ध कीजिए अभाज्य कोटि का प्रत्येक समूह चक्रिय होता है।

3. If N and M are normal subgroups of a group G, then prove that NM is also a normal subgroup of G.

यदि किसी समूह G के दो उपसमूह N और M प्रासामान्य होते हैं, तो सिद्ध कीजिए NM भी G का प्रासामान्य उपसमूह होगा।

4. If R is a ring such that $a^2 = a \ \forall \ a \in$ R, then prove that

(a) $a + a = 0 \ \forall \ a \in$ R.

(b) R is a commutative ring.

यदि R एक ऐसा वलय है जिसमें $a^2 = a \ \forall \ a \in$ R, तो सिद्ध कीजिए:

(क) $a + a = 0 \ \forall \ a \in$ R.

(ख) R एक क्रमविनिमेय वलय है।

5. In the vector space R^4, determine whether or not the vector (3, 9, –4, 2) is a linear combination of the vectors (1, –2, 0, 3), (2, 3, 0, –1) and (2, –1, 2, 1).

निर्धारित करें कि सदिश समष्टि R^4 में, सदिश (3, 9, –4, 2), सदिशों (1, –2, 0, 3), (2, 3, 0, –1) और (2, –1, 2, 1) की एकघात संचय में है या नहीं।

6. Prove that the set of all solutions (a, b, c) of the equation $2a + 3b + 4c = 0$ is a subspace of the vector space $V_3(R)$.

सिद्ध कीजिए कि समीकरण $2a + 3b + 4c = 0$ के सभी हलों (a, b, c) का संग्रह सदिश समष्टि $V_3(R)$ का उपसमष्टि है।

7. Prove that a field has no proper ideals.

सिद्ध कीजिए किसी भी क्षेत्र की उचित गुणजावली विद्यमान नहीं होती है।

8. The centre Z of group G is a normal subgroup of G.

समूह G का केन्द्र Z, G का प्रासामान्य उपसमूह होता है।