

S-65

Total Pages : 4

Roll No.

MT-07

Algebra

बीजगणित

Bachelor of Science (BSC)

3rd Year Examination, 2022 (Dec.)

Time : 2 Hours]

[Max. Marks : 35

Note : This paper is of Thirty Five (35) marks divided into two (02) Sections A and B. Attempt the questions contained in these sections according to the detailed instructions given therein.

नोट : यह प्रश्नपत्र पैंतीस (35) अंकों का है जो दो (02) खण्डों क तथा ख में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों को हल करना है।

SECTION-A/(खण्ड-क)

(Long Answer Type Questions)/(दीर्घ उत्तरों वाले प्रश्न)

Note : Section 'A' contains Five (05) long answer type questions of Nine and Half ($9\frac{1}{2}$) marks each. Learners are required to answer any Two (02) questions only.

($2 \times 9\frac{1}{2} = 19$)

S-65 / MT-07

[P.T.O.

नोट : खण्ड 'क' में पाँच (05) दीर्घ उत्तरों वाले प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए साढ़े नौ (9½) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Show that $G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$ is a group under matrix multiplication.

दर्शाइए कि $G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$ आव्यूह गुणन के अंतर्गत एक समूह है।

2. State and Prove Lagrange's theorem.

लेग्रान्जे की प्रमेय का कथन लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

3. Prove that a finite integral domain is a field.

सिद्ध कीजिए कि एक परिमित इंटीग्रल डोमेन एक फील्ड होता है।

4. If $f: G \rightarrow G'$ is a homomorphism, then show that Kernel of f is a normal subgroup of G .

यदि $f: G \rightarrow G'$ एक होमोमोर्फिज्म है, तब सिद्ध कीजिए कि f का कर्नेल G का एक सामान्य उपसमूह होगा।

5. Show that every finite dimensional vector space has a basis.
दर्शाइए कि प्रत्येक परिमित विमीय सदिश समिष्टि का एक बेसिस होता है।

SECTION-B/(खण्ड-ख)

(Short Answer Type Questions)/(लघु उत्तरों वाले प्रश्न)

Note : Section 'B' contains Eight (08) short answer type questions of Four (04) marks each. Learners are required to answer any Four (04) questions only. (4×4=16)

नोट : खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरों वाले प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए चार (04) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Prove that a subgroup of a cyclic group is also cyclic.

सिद्ध कीजिए कि एक चक्रीय समूह का एक उपसमूह भी चक्रीय होता है।

2. Prove that the center of a group is a subgroup of that group.

सिद्ध कीजिए कि किसी ग्रुप का केंद्र उसका सबग्रुप होता है।

3. Show that the vectors (1, 2, 0), (0, 3, 1) and (-1, 0, 1) in \mathbb{R}^3 are linearly independent.

दर्शाइए कि सदिश (1, 2, 0), (0, 3, 1) और (-1, 0, 1), \mathbb{R}^3 में रैखिक रूप से स्वतंत्र हैं।

4. Find the permutation group isomorphic to the group $G = \{1, -1, i, -i\}$, where $i^2 = -1$.

समूह $G = \{1, -1, i, -i\}$, जहाँ $i^2 = -1$; के आइसोमोर्फिक क्रमचय समूह ज्ञात कीजिए।

5. Show that $S = \{0, 2, 4\}$ and $T = \{0, 3\}$ are subring of the ring $Z_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ of integer modulo 6.

दर्शाइए कि $S = \{0, 2, 4\}$ तथा $T = \{0, 3\}$ वलय $Z_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ इन्टिजर मोडुलो 6; के सबरिंग्स हैं।

6. Show that the set $W = \{(a_1, a_2, a_3) : 2a_1 - 3a_2 = a_3\}$ is a subspace of the vector space \mathbb{R}^3 .

दर्शाइए कि समुच्चय $W = \{(a_1, a_2, a_3) : 2a_1 - 3a_2 = a_3\}$ सदिश समिस्टी \mathbb{R}^3 का एक सबस्पेस है।

7. Give two examples of non-abelian groups.

नॉन-अबेलियन समूहों के कोई दो उदाहरण दीजिए।

8. Show that U_9 is a cyclic group. Find its all generators.

दर्शाइए कि U_9 एक चक्रिय समूह है, इसके सभी जनरेटरस ज्ञात कीजिए।