S-62

Total Pages : 6 Roll No. ....

MT-04

Real Analysis and Matric Space

वास्तविक विश्लेषण एवं दूरीक समष्टि

Bachelor of Science (BSC)

2nd Year Examination, 2022 (Dec.)

Time : 2 Hours] **[Max. Marks : 35**

Note : This paper is of Thirty Five (35) marks divided into two (02) Sections A and B. Attempt the questions contained in these sections according to the detailed instructions given therein.

नोट : यह प्रश्नपत्र पैंतीस (35) अंकों का है जो दो (02) खण्डों क तथा ख में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों को हल करना है।

SECTION–A/(खण्ड-क)

(Long Answer Type Questions)/(दीर्घ उत्तरों वाले प्रश्न)

Note : Section 'A' contains Five (05) long answer type questions of Nine and Half (9½) marks each. Learners are required to answer any Two (02) questions only. (2×9½=19)

नोट : खण्ड 'क' में पाँच (05) दीर्घ उत्तरों वाले प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए साढ़े नौ (9½) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Prove that if x and y are two positive real numbers then there exists a natural number n such that $nx > y$.

सिद्ध कीजिए कि यदि x और y दो धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हों, तो एक प्राकृत संख्या n विधमान होगी कि $nx > y$।

2. Prove that if a sequence of real numbers is convergent if and only if it is a Cauchy sequence.

सिद्ध कीजिए कि यदि वास्तविक संख्याओं का एक अनुक्रम अभिसारी है और केवल यदि यह एक कौशी अनुक्रम है।

3. Prove that if $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ is continuous on $[a,b]$, then $f \in \Re[a,b]$.

सिद्ध कीजिए कि यदि एक फलन $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, $[a,b]$, पर संतत फलन है, तो $f \in \Re[a,b]$.

4. Let (X, d) be any metric space and let k be a fixed positive real number. For $x, y \in \mathrm{X}$, define $d^*(x, y) = kd(x, y)$. Prove that d^* is a metric on X.

मान लीजिए (X, d) कोई दूरिक समष्टि है और k एक निश्चित धनात्मक वास्तविक संख्या है। $x, y \in \mathrm{X}$ के लिए, $d^*(x, y) = kd(x, y)$. सिद्ध कीजिए कि d^* दूरिक X पर है।

5. Let (X, d) be a compact metric space. Then, a closed subset of X is compact.

मान लीजिए (X, d) एक संहत दूरिक समष्टि है तब X का संवृत उपसमुच्चय संहत होता है।

SECTION–B/(खण्ड-ख)

(Short Answer Type Questions)/(लघु उत्तरों वाले प्रश्न)

Note : Section 'B' contains Eight (08) short answer type questions of Four (04) marks each. Learners are required to answer any Four (04) questions only. (4×4=16)

नोट : खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरों वाले प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए चार (04) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Let (R, d) be a usual metric space. Find the limit point of following subset of R.

(i) $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in N \right\}$

(ii) (0, 1)

(iii) [3, 5].

सामान्य दूरिक समष्टि (R, d) के लिए R के निम्न उपसमुच्चयों का सीमा बिन्दु ज्ञात कीजिए।

(i) $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in N \right\}$

(ii) (0, 1)

(iii) [3, 5].

2. Prove that the function $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^{2,}}}$ is continuous at origin, where $f(0, 0) = 0$.

सिद्ध करें कि फलन $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^{2,}}}$ मूल बिंदु पर संतत है, जहाँ $f(0,0) = 0$.

3. Prove that the following function is not continuous at $x = 0$?

$$f(x) = \begin{cases} 1; & x = 0 \\ 1 - \frac{|x|}{x}; & x \neq 0 \end{cases}$$

सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित फलन $x = 0$ पर संतत नहीं है?

$$f(x) = \begin{cases} 1; & x = 0 \\ 1 - \frac{|x|}{x}; & x \neq 0 \end{cases}$$

4. Prove that a sequence $< \frac{1}{n^2} >$ is a Cauchy sequence.

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $< \frac{1}{n^2} >$ कोशी अनुक्रम है।

5. Prove that the following sequence is convergent.

$$x_n = \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+2)} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{(n+n)} \forall n \in N.$$

सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित अनुक्रम अभिसारी अनुक्रम है।

$$x_n = \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+2)} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{(n+n)} \forall n \in N.$$

6. Prove that the series $\sum \frac{1}{1+n^2 x}$ is uniformly convergent on $[1, \infty)$.

प्रदर्शित कीजिए कि श्रेणी $\sum \frac{1}{1+n^2 x}$ अन्तराल $[1, \infty)$ एक समान अभिसारी है।

7. State and prove Rolle's Theorem.

रोल प्रमेय का उल्लेख कीजिए और सिद्ध कीजिए।

8. Prove that the sequence $\left\{n^{1/n}\right\}$ converges to 1.

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\left\{n^{1/n}\right\}$ को अभिसरत होती है।