

**MT-07**  
**Algebra**

बीजगणित

Bachelor of Science (Bsc-12/16)

Third Year, Examination-2019

**Time: 3 Hours**

**Max. Marks: 40**

.....  
Note:- This paper is of Forty (40) marks divided into two (02) Section A and B. Attempt the question contained in these sections according to the detailed instructions given therein.

नोट:- यह प्रश्न-पत्र चालीस (40) अंकों का है जो दो (02) खण्डों 'क' तथा 'ख' में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार इन प्रश्नों को हल करना है।

Section-A (खण्ड-क)

(Long Answer Type Question) (दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

Note:- Section - A contains Three (03) long answer-type questions of Ten (10) marks each. Learners are required to answer any Two (02) questions only. (2×10=20)

नोट:- खण्ड 'क' में तीन (03) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए दस (10) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Define cyclic groups with example if  $a$  is the generators of cyclic group  $G = \langle a \rangle$  order  $n$ , then  $a^m$  is also generator if  $m$  and  $n$  are relatively prime i.e.  $(m, n) = 1$

चक्रीय समूह को उदाहरण सहित परिभाषित कीजिए, यदि चक्रीय समूह  $G = \langle a \rangle$  का समूहक  $n$  है तो सिद्ध कीजिए कि  $a^m$  भी जनक होगा यदि और केवल यदि  $m, n$  परस्पर रूढ़ हैं अर्थात्  $(m, n) = 1$

2. Define characteristic of an integral domain show that characteristic of an integral domain is 0 or a positive integer  $n$  according to order of any non-zero element  $a$  of  $D$  is 0 or  $n$  (Treat  $a$  as an element of  $D, +$ )

पूर्णाकीय प्रान्त का अभिलक्षण की परिभाषा दीजिए। पूर्णाकीय प्रान्त का अभिलक्षण शून्य अथवा एक धनात्मक पूर्णांक  $n$  होता है यदि  $D$  के किसी भी स्वेच्छ अशून्य अवयव  $a$  ( $a$  को योगात्मक ग्रुप  $(D, +)$  का सदस्य मानते हुये) की कोटि शून्य अथवा  $n$  है।

3. Define Basis, dimension of a vecta space with examples. Show that if  $S_1 = \{x, y, z\}$  is basis of  $V(R) = \{(a \ b \ c) : a, b, c \in R\}$  Then  $S_2 = \{x+y, y+z, z+x\}$  is also basis of  $V(R)$

सदिश समष्टि का आधार विमा को उदाहरण सहित परिभाषित कीजिए प्रदर्शित कीजिये कि यदि  $S_1 = \{x, y, z\}$  सदिश समष्टि  $V(R) = \{(a \ b \ c) : a, b, c \in R\}$  का आधार है तो समुच्चय  $S_2 = \{x+y, y+z, z+x\}$  भी  $V(R)$  का आधार होगा।

### Section-B (खण्ड—ख)

(Short Answer Type Question) (लघु उत्तरीय प्रश्न)

Note:- Section-B contains six (06) short answer type questions of five (05) marks each. Learners are required to answer any four (04) questions only. (5×4=20)

नोट:- खण्ड 'ख' में छः (06) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए पाँच (05) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Prove that a group of order 4 is always commutative.

सिद्ध कीजिए कि चार कोटि का प्रत्येक समूह क्रमविनिमेय होता है।

2. If  $a$  is an element of a group of order  $n$  then  $a^n = e$

यदि  $a$  किसी  $n$  कोटि के परिमित समूह  $G$  का कोई अवयव हो तो  $a^n = e$

3. If  $H$  and  $K$  are subgroup of a finite commutative group then  $O(HK) = \frac{O(H) \cdot O(K)}{O(H \wedge K)}$

यदि  $H$  और  $K$  किसी क्रमविनिमेय समूह के दो परिमित उपसमूह हैं तब

$$O(HK) = \frac{O(H) \cdot O(K)}{O(H \wedge K)}$$

4. Define kernel of Homomorphism with two examples.

समाकारित की अष्टि को दो उदाहरणों सहित समझाइए।

5.  $H$  is a normal subgroup of  $G$  iff  $xHx^{-1} = H$   
 $x \in G$ .

किसी समूह  $G$  का एक उपसमूह  $H$  प्रसामान्य होता है यदि और केवल यदि  $xHx^{-1} = H$   $x \in G$ .

6. Show that intersection of two subspace of a vecta space is also a subspace.

किसी सदिश समष्टि के किन्हीं दो उपसमष्टियों का सर्वनिष्ठ भी उस सदिश समष्टि की उपसमष्टि होती है।