Total Printed Page: 4 Roll No............

MT-04

Real Analysis & Metric Space

वास्तविक विश्लेषण एवं दूरीक समष्ठी

Bachelor of Science (Bsc-12/16)

Second Year, Examination-2019

Time: 3 Hours **Max. Marks: 40**

....

Note:- This paper is of Forty (40) marks divided into two (02) Section A and B. Attempt the question contained in these sections according to the detailed instructions given therein.

नोटः— यह प्रश्न—पत्र चालीस (40) अंकों का है जो दो (02) खण्डों 'क' तथा 'ख' में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार इन प्रश्नों को हल करना है।

Section-A (खण्ड—क)

(Long Answer Type Question) (दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

Note:- Section - A contains Three (03) long answer-type questions of Ten (10) marks each. Learners are required to answer any Two (02) questions only. $(2\times10=20)$

नोटः– खण्ड 'क' में तीन (03) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए दस (10) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. A sequence $<a_n>$ is defined as $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (4 + 3a_n)(3 + 2a_n)$, $n \geq 1$. Show that $<a_n>$ converges and find its limit.

   एक श्रेणी $<a_n>$ इस प्रकार परिभाषित है कि $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (4 + 3a_n)(3 + 2a_n)$, $n \geq 1$, सिद्ध कीजिए $<a_n>$ अभिसारी है और इसकी सीमा ज्ञात कीजिए।

2. Let (x, d) be a metric space. If $S \subset X$, then prove that

$$\bar{S} = S \cup S^1$$

   यदि (x, d) एक दूरीक समष्टि है

   यदि $S \subset X$ तब सिद्ध कीजिए

$$\bar{S} = S \cup S^1$$

3. If a function f is continuous in [0, 1], show that

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \frac{xf(x)}{1 + n^2x^2} dx = \frac{\pi}{2} f(0)$$

   यदि f एक फलन [0, 1] में सतत् हैं, सिद्ध कीजिए कि

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \frac{xf(x)}{1 + n^2x^2} dx = \frac{\pi}{2} f(0)$$

Section-B (खण्ड–ख)

(Short Answer Type Question) (लघु उत्तरीय प्रश्न)

Note:- Section-B contains six (06) short answer type questions of five (05) marks each. Learners are required to answer any four (04) questions only. (5×4=20)

नोटः– खण्ड 'ख' में छः (06) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए पाँच (05) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Prove that

$$\int_{-1}^{2} |x| dx = \frac{5}{2}$$

सिद्ध कीजिए

$$\int_{-1}^{2} |x| dx = \frac{5}{2}$$

2. Let d (x, y) = min [2, |x – y|]. Show that d is usual metric on R.

यदि d (x, y) = न्यूनतम [2, |x – y|] सिद्ध कीजिए कि d, R के ऊपर सामान्य दूरीक समष्टि है।

3. Show that the function, defined as

$f(x) = \frac{x}{1+e^{1/x}}$, if x ≠ 0, $= 0$ if x = 0

is continuous at x = 0 but not deriable at x = 0.

सिद्ध कीजिए कि फलन जो इस प्रकार परिभाषित है

f (x) $= \frac{x}{1+e^{1/x}}$, यदि $x \neq 0$, $= 0$ यदि $x = 0$ पर सतत् है लेकिन $x = 0$ पर समाकलनीय नहीं है।

4. Show that the function f defined by

$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(2+x) - x^{2n} \sin x}{1+x^{2n}}$

is integiable on [0, π/2]

सिद्ध कीजिए कि फलन f जो इस प्रकार परिभाषित है

$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(2+x) - x^{2n} \sin x}{1+x^{2n}}$

[0, π/2] के ऊपर समाकलनीय है।

5. Show that $\sum \frac{1}{(n^p+n^q x^2)}$ is uniformly convergent for all x real and $p > 1$.

सिद्ध कीजिए कि $\sum \frac{1}{(n^p+n^q x^2)}$, x के सभी मानों के लिए एक समान रूप से अभिसारी है और $p > 1$.

6. Use the mean value theorem to prove $\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1}x < x$

if $x > 0$.

मीन वेल्यू प्रमेय का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए

$$\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1}x < x$$

यदि $x > 0$.