Roll No. ……..

MT–08

Complex Analysis

(समिश्र विश्लेषण)

Bachelor of Science (BSC–12/16)

Third Year, Examination, 2018

Time : 3 Hours **Max. Marks : 40**

Note : This paper is of **forty (40)** marks containing **three (03)** sections A, B and C. Learners are required to attempt the questions contained in these sections according to the detailed instructions given therein.

नोट : यह प्रश्न पत्र चालीस (40) अंकों का है जो तीन (03) खण्डों 'क', 'ख' तथा 'ग' में विभाजित है। शिक्षार्थियों को इन खण्डों में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

Section–A / खण्ड–क

(Long Answer Type Questions) / (दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

Note : Section 'A' contains four (04) long answer type questions of nine and half ($9\frac{1}{2}$) marks each. Learners are required to answer *two* (02) questions only.

नोट : खण्ड 'क' में चार (04) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए साढ़े नौ ($9\frac{1}{2}$) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Find the ortho-centre of the triangle whose vertices are z_1, z_2, z_3.

   त्रिभुज का लम्ब-केन्द्र ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष बिन्दु z_1, z_2, z_3 हैं।

2. Show that $\left|\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\bar{z}_2}\right| < 1$ if $|z_1| < 1$ and $|z_2| < 1$.

   दर्शाइए $\left|\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\bar{z}_2}\right| < 1$ यदि $|z_1| < 1$ तथा $|z_2| < 1$ ।

3. By transformation $w = z^2$, show that circle $|z - a| = c$, (a, c being real) in the z-plane corresponds to the limacons in the w-plane.

   दर्शाइये कि प्रतिचित्रण $w = z^2$ के द्वारा z-तल में वृत्त $|z - a| = c$ (a व c वास्तविक संख्या) w-तल में लिमाकोन्स निरूपित होगा।

4. State and prove Morera's theorem.

   मोरेरा प्रमेय को परिभाषित करते हुए सिद्ध कीजिए।

Section–B / खण्ड–ख

(Short Answer Type Questions) / (लघु उत्तरीय प्रश्न)

Note : Section 'B' contains eight (08) short answer type questions of four (04) marks each. Learners are required to answer *four* (04) questions only.

नोट : खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए चार (04) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Show that the function $u = \cos x \cosh y$ is harmonic and find its harmonic conjugate.

   दर्शाइये कि फलन $u = \cos x \cosh y$ हारमोनिक है तथा इसका हारमोनिक व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।

2. Discuss the transformation $w = f(\bar{z})$, where symbols have their usual meaning.

   प्रतिचित्रण $w = f(\bar{z})$ की व्याख्या कीजिए, जहाँ संकेतकों का सामान्य अर्थ है।

3. Evaluate the integral $\int_0^{1+i} z^2 dz$.

   समाकल $\int_0^{1+i} z^2 dz$ का मान ज्ञात कीजिए।

4. Prove that :

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz$$

where symbols have their usual meaning.

सिद्ध कीजिए :

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz$$

जहाँ संकेतकों का सामान्य अर्थ है।

5. Expand :

$$f(z) = \frac{z+3}{z(z^2 - z - 2)}$$

in powers of z, where $1 < |z| < 2$.

$f(z) = \frac{z+3}{z(z^2 - z - 2)}$ को z के घातों में विस्तारित कीजिए, जहाँ पर $1 < |z| < 2$ ।

6. Find the residue of $\frac{z^3}{z^2 - 1}$ at $z = \infty$.

$\frac{z^3}{z^2 - 1}$ का $z = \infty$ का अवशेष प्राप्त कीजिए।

7. Show that the series :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \text{ and } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-1)^{n-1}}$$

are analytic continuation of each other.

दर्शाइये कि श्रेणियाँ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \text{ और } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-1)^{n-1}}$$

एक-दूसरे का विश्लेषिक सांतत्य हैं।

8. State and prove Residues theorem.
अवशेष प्रमेय को परिभाषित व सिद्ध कीजिए।

Section–C / खण्ड–ग

(Objective Type Questions) / (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

Note : Section 'C' contains ten (10) objective type questions of half $\left(\frac{1}{2}\right)$ mark each. All the questions of this section are compulsory.

नोट : खण्ड 'ग' में दस (10) वस्तुनिष्ठ प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए आधा $\left(\frac{1}{2}\right)$ अंक निर्धारित है। इस खण्ड के सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

Fill in the blanks :

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

1. $|z_1 - z_2| \leq$ .....

2. $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| =$ const and amp $\left(\frac{z-1}{z+1}\right) =$ const are ..... circles.

$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| =$ const तथा amp $\left(\frac{z-1}{z+1}\right) =$ const ..... वृत्त हैं।

3. $\arg(z) + \arg(\bar{z}) =$ ..... .

4. Equation $\left|\frac{z - p}{z - q}\right| = k$ represents a line if $k =$ ..... .

   समीकरण $\left|\frac{z - p}{z - q}\right| = k$ एक रेखा को निरूपित करता है यदि $k =$ ..... ।

5. Residue of $f(z)$ at the simple pole $z = a$ is ..... .

   फलन $f(z)$ का सामान्य पोल $z = a$ पर अवशेष ..... होगा।

6. $\frac{\partial z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial y^2} =$ .....

7. The transformation $w = \frac{az + b}{cz + d}$, where $ad - cd \neq 0$, $c \neq 0$ represents a ..... transformation.

   प्रतिचित्रण $w = \frac{az + b}{cz + d}$, जहाँ $ad - cd \neq 0$, $c \neq 0$ एक ..... प्रतिचित्रण को दर्शाता है।

8. If $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ represents a complex number, then the value of θ which satisfies the above equation and lies between $-\pi$ and π is called ..... .

   यदि $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ एक समिश्रित संख्या निरूपित करता है, तब θ का मान जो उपर्युक्त समीकरण को संतुष्ट करता हो जिसका मान $-\pi$ तथा π के बीच हो, उसे ..... कहते हैं।

9. Equation :

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = \text{const.}$$

represents a ..... .

समीकरण :

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = \text{const.}$$

एक ..... को निरूपित करता है।

10. $z - \bar{z} = 2I_m(z)$ .....