

MT-08**Complex Analysis**

(समिश्र विश्लेषण)

Bachelor of Science (BSC-12/16)

Third Year, Examination, 2017

Time : 3 Hours**Max. Marks : 40**

Note : This paper is of **forty (40)** marks containing **three (03)** Sections A, B and C. Learners are required to attempt the questions contained in these Sections according to the detailed instructions given therein.

नोट : यह प्रश्न पत्र चालीस (40) अंकों का है जो तीन (03) खण्डों 'क', 'ख' तथा 'ग' में विभाजित है। शिक्षार्थियों को इन खण्डों में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

Section-A / खण्ड-क**(Long Answer Type Questions) / (दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)**

Note : Section 'A' contains four (04) long answer type questions of nine and half ($9\frac{1}{2}$) marks each. Learners are required to answer *two* (02) questions only.

नोट : खण्ड 'क' में चार (04) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं।
प्रत्येक प्रश्न के लिए साढ़े नौ ($9\frac{1}{2}$) अंक निर्धारित हैं।
शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Show that the function :

$$f(z) = \sqrt{|xy|}$$

is not regular at the origin, although Cauchy-Riemann equations are satisfied at the point.

दर्शाइये कि फलन :

$$f(z) = \sqrt{|xy|}$$

मूलबिन्दु पर रेगुलर नहीं है यद्यपि वहाँ पर कौशी-रीमान समीकरण संतुष्ट होते हैं।

2. Find the bilinear transformation which transforms the points $z = 2, 1, 0$ into $w = 1, 0, i$ respectively.

वह द्विरैखिक रूपान्तरण प्राप्त कीजिए जो बिन्दुओं $z = 2, 1, 0$ को $w = 1, 0, i$ में रूपान्तरित करे।

3. Prove that the derivative of an analytic function is analytic.

सिद्ध कीजिए कि विश्लेषिक फलन का अवकलज विश्लेषिक है।

4. Prove that :

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^2} dz = 0$$

where γ is defined by $|z| = d, d > 0$.

सिद्ध कीजिए :

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^2} dz = 0$$

जब $|z| = d, d > 0$ परिभाषित करता है γ को।

Section-B / खण्ड-ख

(Short Answer Type Questions) / (लघु उत्तरीय प्रश्न)

Note : Section 'B' contains eight (08) short answer type questions of four (04) marks each. Learners are required to answer *four* (04) questions only.

नोट : खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए चार (04) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Find the equation of a circle having the line joining z_1 and z_2 as diameter.

उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका व्यास बिन्दुओं z_1 तथा z_2 को जोड़ने वाली रेखा हो।

2. Prove that, if $u = x^2 - y^2$, $v = -\frac{y}{(x^2 + y^2)}$ both u and v satisfy Laplace's equation.

यदि $u = x^2 - y^2$, $v = -\frac{y}{(x^2 + y^2)}$, तो दर्शाइये कि u और v दोनों लाप्लास समीकरण को संतुष्ट करते हैं।

3. Show that :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

दर्शाइये कि :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

4. Write short notes on the following :

(i) Magnification and rotation

(ii) Inversion in the real axis and in the unit circle

निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणियाँ लिखिए :

(i) आवर्धन एवं परिक्रमण

(ii) वास्तविक अक्ष और इकाई वृत्त पर प्रतिलोम

5. Find the fixed points of the following bilinear transformation :

$$w = \frac{3iz+1}{z+i}.$$

निम्नलिखित द्विरैखिक रूपान्तरण के स्थिर बिन्दु प्राप्त कीजिए :

$$w = \frac{3iz+1}{z+i}.$$

6. Find the value of the integral $\int \frac{1}{z-a} dz$ around a circle

whose equation is $|z-a| = \rho$.

समाकलन $\int \frac{1}{z-a} dz$ का मान एक वृत्त की परिधि पर ज्ञात

कीजिए जिसका समीकरण $|z-a| = \rho$ हो।

7. Show that :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

सिद्ध कीजिए :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

8. Show that :

$$\arg(z) + \arg(\bar{z}) = 2n\pi.$$

सिद्ध कीजिए :

$$\arg(z) + \arg(\bar{z}) = 2n\pi.$$

Section-C / खण्ड-ग

(Objective Type Questions) / (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

Note : Section 'C' contains ten (10) objective type questions of half $\frac{1}{2}$ mark each. All the questions of this Section are compulsory.

नोट : खण्ड 'ग' में दस (10) वस्तुनिष्ठ प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए आधा $\frac{1}{2}$ अंक निर्धारित है। इस खण्ड के सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

Choose the correct answer :

सही उत्तर का चयन कीजिए :

1. Equation $\bar{q}z + qz + r = 0$, $q \neq 0, r \in \mathbb{R}$ represents :

- (a) A circle
- (b) A cone
- (c) A line
- (d) None of these

समीकरण $\bar{q}z + qz + r = 0$, $q \neq 0, r \in \mathbb{R}$ निरूपित करता है :

- (अ) वृत्त
- (ब) शंकु
- (स) रेखा
- (द) इनमें से कोई नहीं

Fill in the blanks :

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

2. An analytic function with constant modulus is

नियत मापक का विश्लेषिक फलन होता है।

3. If $w = \Gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc \neq 0$ is transformation,
then $ad-bc$ is called

यदि $w = \Gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc \neq 0$ एक रूपान्तरण
निरूपित करता हो, तो $ad-bc$ कहलाता है ।

4. $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=3} \frac{e^z}{z-z} dz = \dots\dots\dots$

5. $\int z dz = \dots\dots\dots$ along the line $z = 0$ to $z = 1 + i$.

एक रेखा $z = 0$ से $z = 1 + i$ की ओर समाकलन $\int z dz =$
..... ।

6. Residue of $f(z)$ at the simple pole $z = a$ is

फलन $f(z)$ का साधारण ध्रुव $z = a$ पर अवशेष होता
है।

7. $\text{amp } \bar{z} = \text{amp } z \dots\dots\dots$

8. $z - \bar{z} = 2I_m(z)$

9. The transformation $w = \frac{az+b}{cz+d}$ is called parabolic, if
 $\Delta = (a-d)^2 + 4bc = 1$

रूपान्तरण $w = \frac{az+b}{cz+d}$ परवलीय होगा, यदि
 $\Delta = (a-d)^2 + 4bc = 1$ |

10. $\frac{2\pi i}{n!} f^n(a) = \int_C \frac{f(z) dz}{(z+a)^{n+1}}$