

MT-07**Algebra**

(बीजगणित)

Bachelor of Science (BSC-12/16)

Third Year, Examination, 2017

Time : 3 Hours**Max. Marks : 40**

Note : This paper is of **forty (40)** marks containing **three (03)** Sections A, B and C. Learners are required to attempt the questions contained in these Sections according to the detailed instructions given therein.

नोट : यह प्रश्न पत्र चालीस (40) अंकों का है जो तीन (03) खण्डों 'क', 'ख' तथा 'ग' में विभाजित है। शिक्षार्थियों को इन खण्डों में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

Section-A / खण्ड-क**(Long Answer Type Questions) / (दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)**

Note : Section 'A' contains four (04) long answer type questions of nine and half ($9\frac{1}{2}$) marks each. Learners are required to answer *two* (02) questions only.

नोट : खण्ड 'क' में चार (04) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं।
प्रत्येक प्रश्न के लिए साढ़े नौ ($9\frac{1}{2}$) अंक निर्धारित हैं।
शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. If H_1 and H_2 are two subgroups of a group G , then prove that $H_1 \cap H_2$ is also a subgroup of G .

यदि H_1 और H_2 दो उपसमूह हैं समूह G के, तो सिद्ध कीजिए कि $H_1 \cap H_2$ भी G का एक उपसमूह होगा।

2. Prove that the order of each subgroup of a finite group is divisor of the order of the group.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक उपसमूह का क्रम उसके नियत समूह के क्रम का भाजक होता है।

3. Prove that every subgroup of a cyclic group is cyclic.

सिद्ध कीजिए कि चक्रीय समूह का प्रत्येक उपसमूह भी चक्रीय होता है।

4. Prove that every field is an integral domain.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक क्षेत्र एक पूर्णाकीय प्रान्त होता है।

Section-B / खण्ड-ख

(Short Answer Type Questions) / (लघु उत्तरीय प्रश्न)

Note : Section 'B' contains eight (08) short answer type questions of four (04) marks each. Learners are required to answer *four* (04) questions only.

नोट : खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं।
प्रत्येक प्रश्न के लिए चार (04) अंक निर्धारित हैं।
शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Prove that $Z_4\{0, 1, 2, 3\}$ is an abelian group with respect to addition modulo 4.
सिद्ध कीजिए कि $Z_4\{0,1,2,3\}$ योग मॉड्यूलो 4 के लिए आबेली समूह है।
2. Show that the fourth root of unity namely $\{1, -1, i, -i\}$ forms a group with respect to multiplication.
सिद्ध कीजिए कि इकाई के चौथे मूल गुणन के लिए एक समूह बनाते हैं।
3. If N and M are normal subgroups of G, prove that NM is also a normal subgroup G.
यदि N और M, G के प्रसामान्य उपसमूह हैं, तो सिद्ध कीजिए कि NM भी G का एक प्रसामान्य उपसमूह होगा।
4. Show that the group $G = (\{0, 1, 2, 3\}, t_4)$ is isomorphic to the group $G = (\{0, 1, 2, 3\}, \times_5)$.
दिखाइए कि समूह $G = (\{0,1,2,3\}, t_4)$ समूह $G = (\{0,1,2,3\}, \times_5)$ के साथ समकारित है।
5. Let G be the additive group of integers. Then prove that set of all multiples integers by a fixed integer m is a subgroup of G.
G पूर्णाकों का एक जोड़ समूह है। सिद्ध कीजिए कि पूर्णाकों के समुच्चय को नियत पूर्णांक m से गुणा करने पर G का एक उपसमूह मिलता है।

6. Show that a system consisting of a single non-zero vector is always linearly independent.

सिद्ध कीजिए कि एक सिस्टम जिसमें एक अकेला अशून्य सदिश है, हमेशा एक घातीय स्वतंत्र होता है।

7. Determine whether or not the following vectors form a basis of \mathbb{R}^3 :

$$(1, 1, 2), (1, 2, 5), (5, 3, 4)$$

निम्नांकित सदिश, \mathbb{R}^3 का आधार बनाते हैं या नहीं :

$$(1, 1, 2), (1, 2, 5), (5, 3, 4)$$

8. Intersection of any two subspaces W_1 and W_2 of a vector space $V(F)$ is also a subspace of $V(F)$.

सदिश समष्टि $V(F)$ की उपसमष्टि W_1 और W_2 का प्रतिच्छेदन भी $V(F)$ की एक उपसमष्टि होती है।

Section-C / खण्ड-ग

(Objective Type Questions) / (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

Note : Section 'C' contains ten (10) objective type questions of half $\frac{1}{2}$ mark each. All the questions of this Section are compulsory.

नोट : खण्ड 'ग' में दस (10) वस्तुनिष्ठ प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए आधा $\frac{1}{2}$ अंक निर्धारित है। इस खण्ड के सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

Choose the correct answer :

सही उत्तर का चयन कीजिए :

1. The set of all positive rational numbers from an abelian group under the composition defined by $a * b = (ab)/2$. Identity element of this group is :

(a) 1

(b) 2

(c) 0

(d) None of these

धनात्मक संख्याओं का समुच्चय रचना $a*b = (ab)/2$ के सापेक्ष एक आबेली समूह बनता है। इस ग्रुप का इकाई अवयव होगा :

- (अ) 1 (ब) 2
(स) 0 (द) इनमें से कोई नहीं

2. The order of 1 in the group $(\{0, 1, 2, 3, 4\}, +_5)$ is :

- (a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 5

समूह $(\{0, 1, 2, 3, 4\}, +_5)$ में 1 का क्रम होगा :

- (अ) 1 (ब) 2
(स) 3 (द) 5

3. If $G = \{1, -1\}$, then G will be :

- (a) Additive group
(b) Multiplicative group
(c) Negative group
(d) None of these

यदि $G = \{1, -1\}$, तो G होगा :

- (अ) जोड़ समूह
(ब) गुणन समूह
(स) ऋणात्मक समूह
(द) इनमें से कोई नहीं

4. Every cyclic group is :

- (a) Permutation group
- (b) Non-abelian group
- (c) Abelian group
- (d) None of these

प्रत्येक चक्रीय समूह होता है :

- (अ) क्रमचय समूह
- (ब) आबेली समूह नहीं होता
- (स) आबेली समूह
- (द) इनमें से कोई नहीं

5. The number of generators of the cyclic group G of order 8 is :

- (a) 2
- (b) 4
- (c) 6
- (d) None of these

चक्रीय समूह G जिसका क्रम 8 है, के कितने जनक होंगे ?

- (अ) 2
- (ब) 4
- (स) 6
- (द) इनमें से कोई नहीं

6. Any subgroup H of a group G is normal if for all $x \in G$, we have :

- (a) $Hx = xH$
- (b) $Hx \neq xH$
- (c) $Hx = H$
- (d) $xHx^{-1} \neq H$

किसी समूह G का उपसमूह H प्रसामान्य होगा यदि प्रत्येक $x \in G$ के लिए :

- (अ) $Hx = xH$
- (ब) $Hx \neq xH$
- (स) $Hx = H$
- (द) $xHx^{-1} \neq H$

7. If G is a finite group of H is a normal subgroup of G , then $o(G/H)$ is equal to :

- (a) $o(G)$ (b) $o(H)$
(c) $o(G)/o(H)$ (d) None of these

यदि G एक नियत समूह है और H, G का उपसमूह है, तो $o(G/H)$ होगा :

- (अ) $o(G)$ (ब) $o(H)$
(स) $o(G)/o(H)$ (द) इनमें से कोई नहीं

8. If p is a prime number and G is a non-abelain group of p^3 , then the number of elements in the centre of G is :

- (a) p (b) p^2
(c) p^3 (d) None of these

यदि p एक अभाज्य संख्या है और G एक नॉन-आबेली समूह है जिसका क्रम p^3 है, तो G केंद्र में कितने अवयव होंगे ?

- (अ) p (ब) p^2
(स) p^3 (द) इनमें से कोई नहीं

9. The algebraic structure $(\{0, 1, 2, 3\}, +_4, \times_4)$ is :

- (a) Ring
(b) An integral domain
(c) A field
(d) A skew field

बीजगणितीय संरचना $(\{0, 1, 2, 3\}, +_4, \times_4)$ है :

- (अ) वलय

- (ब) पूर्णाकीय प्रान्त
 (स) क्षेत्र
 (द) स्क्यू क्षेत्र

10. In the ring of 2×2 matrices over the field of real numbers, the zero element of the ring is the matrix :

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2×2 आव्यूह का वलय जो वास्तविक संख्याओं पर है, का शून्य अवयव होगा :

(अ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(ब) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(स) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(द) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$