 Roll No. …………………..

MT–04

Real Analysis & Metric Space

(वास्तविक विश्लेषण एवं दूरीक समष्टि)

Bachelor of Science (BSC–12/16)

Second Year, Examination, 2017

Time : 3 Hours **Max. Marks : 40**

Note : This paper is of **forty (40)** marks containing **three (03)** Sections A, B and C. Learners are required to attempt the questions contained in these Sections according to the detailed instructions given therein.

नोट : यह प्रश्न पत्र चालीस (40) अंकों का है जो तीन (03) खण्डों 'क', 'ख' तथा 'ग' में विभाजित है। शिक्षार्थियों को इन खण्डों में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

Section–A / खण्ड–क

(Long Answer Type Questions) / (दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

Note : Section 'A' contains four (04) long answer type questions of nine and half ($9\frac{1}{2}$) marks each. Learners are required to answer *two* (02) questions only.

नोट : खण्ड 'क' में चार (04) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए साढे नौ ($9\frac{1}{2}$) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Show that the sequence $<x_n>$ is convergent and its limit is between 2 and 3, where :

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \forall\, n \in \mathrm{N}$$

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $<x_n>$ एक अभिसारी है तथा इसकी सीमा 2 एवं 3 के मध्य है, जहाँ $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \forall\, n \in \mathrm{N}$ है।

2. If f is differentiable in $[a, b]$ and $f'(a)$, $f'(b)$ are of opposite sign, then there exist $\mathrm{C} \in]a, b[$ such that $f'(c) = 0.$

यदि f, $[a, b]$ में अवकलनीय है तथा $f'(a)$, $f'(b)$ विपरीत चिन्ह के हैं, तब $\mathrm{C} \in]a, b[$ इस प्रकार विद्यमान होता है कि $f'(c) = 0$ ।

3. Find the necessary and sufficient condition for Riemann integrability.

रीमान समाकलनीयता के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध प्राप्त कीजिए।

4. If X and Y are metric spaces. A mapping $f : X \to Y$ is continuous on X iff $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} \forall A \subset X$.

यदि X तथा Y दूरीक समष्टियाँ हैं। एक प्रतिचित्रण $f : X \to Y$, X पर सतत् है यदि और केवल यदि $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} \forall A \subset X$।

Section–B / खण्ड–ख

(Short Answer Type Questions) / (लघु उत्तरीय प्रश्न)

Note : Section 'B' contains eight (08) short answer type questions of four (04) marks each. Learners are required to answer *four* (04) questions only.

नोट : खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए चार (04) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. $\sqrt{2}$ is an irrational number. Prove it.

   $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है। सिद्ध कीजिए।

2. Finite intersection of open sets is open.

   विवृत समुच्चयों का प्रत्येक परिमित सर्वनिष्ठ एक विवृत समुच्चय होता है।

3. Show that the sequence $< x_n >$ is convergent, where :

$$x_n = \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+n)} \; \forall \, n \in \mathrm{N}$$

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $<x_n>$ अभिसारी है,

जहाँ $x_n = \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+2)} + .. + \frac{1}{(n+n)} \forall n \in \mathrm{N}$ है।

4. Function $f(x) = |x| \forall x \in \mathrm{R}$ is not differentiable at $x = 0$.

फलन $f(x) = |x| \forall x \in \mathrm{R}$, $x = 0$ पर अवकलनीय नहीं है।

5. Show that the function :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ;(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ;(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

is continuous at (0, 0).

सिद्ध कीजिए कि फलन :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ;(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ;(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(0, 0) पर सतत् है।

6. Evaluate :

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)......\left(1+\frac{n}{n}\right) \right]^{\frac{1}{n}}$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)......\left(1+\frac{n}{n}\right) \right]^{\frac{1}{n}}$$

7. If (X, *d*) is a metric space and D is defined on X such that :

$$D(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \; \forall x, y \in X$$

Show that (X, D) is a metric space.

यदि (X, d) एक दूरीक समष्टि है तथा D, X पर निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$D(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \; \forall x, y \in X$$

प्रदर्शित कीजिए कि (X, D) एक दूरीक समष्टि है।

8. If (X, *d*) is a metric space and A, B are the subsets of X, then show that :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

यदि (X, d) एक दूरीक समष्टि है तथा A, B, X के कोई दो उपसमुच्चय हैं, सिद्ध कीजिए :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Section–C / खण्ड–ग

(Objective Type Questions) / (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

Note : Section 'C' contains ten (10) objective type questions of half $\frac{1}{2}$ mark each. All the questions of this Section are compulsory.

नोट : खण्ड 'ग' में दस (10) वस्तुनिष्ठ प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए आधा $\frac{1}{2}$ अंक निर्धारित है। इस खण्ड के सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

Write T for True and F for False statement :

सत्य कथन के लिए T और असत्य कथन के लिए F लिखिए :

1. Ordered field is an infinite field.

   क्रमित क्षेत्र अनन्त क्षेत्र होता है।

2. Every open interval is an open set.

   प्रत्येक विवृत अन्तराल एक विवृत समुच्चय होता है।

3. Limit of the sequence $<\frac{1}{n^2}> \forall n \in \mathrm{N}$ is 1.

   अनुक्रम $<\frac{1}{n^2}> \forall n \in \mathrm{N}$ की सीमा 1 है।

4. We can use Rolle's theorem on function $f(x) = 8x - x^2$ in interval [2, 6].

   फलन $f(x) = 8x - x^2$ में अन्तराल $[2, 6]$ में रौले प्रमेय लगायी जा सकती है।

5. $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 3}} (4x + 3y) = 10$.

   $\underset{\substack{x \to 2 \\ y \to 3}}{\text{सीमा}} (4x + 3y) = 10$ ।

6. Every bounded function is Riemann integrable.

   प्रत्येक परिबद्ध फलन रीमान समाकलनीय होता है।

7. If function f is bounded and Riemann integrable on $[a, b]$ and $f(x) \geq 0 \;\; \forall x \in [a, b]$, then $\int_a^b f(x)dx \geq 0.$

   यदि फलन $f, [a, b]$ पर परिबद्ध एवं रीमान समाकलनीय है तथा $f(x) \geq 0 \; \forall x \in [a, b]$, तब $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ ।

8. Series $\Sigma \dfrac{x^n}{n^2}$ is not convergent in [0, 1].

   श्रेणी $\Sigma \dfrac{x^n}{n^2}$, $[0,1]$ में अभिसारी नहीं है।

9. If series of Riemann integrable functions in term by term integrable, then "series is convergent".

   यदि रीमान समाकलनीय फलनों की श्रेणी पदशः समाकलनीय है, तब "श्रेणी एकसमान अभिसारी होती है।"

10. If (X, d) is a metric space and A, B are two subsets of X, then $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

    यदि (X, d) एक दूरीक समष्टि है तथा A, B, X के दो उपसमुच्चय हैं, तब $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ ।