MT–02

Calculus and Differential Equation

(कलन एवं अवकल समीकरण)

Bachelor of Science (BSC–12/16)

First Year, Examination, 2017

Time : 3 Hours **Max. Marks : 40**

Note : This paper is of **forty (40)** marks containing **three (03)** Sections A, B and C. Learners are required to attempt the questions contained in these Sections according to the detailed instructions given therein.

नोट : यह प्रश्न पत्र चालीस (40) अंकों का है जो तीन (03) खण्डों 'क', 'ख' तथा 'ग' में विभाजित है। शिक्षार्थियों को इन खण्डों में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

Section–A / खण्ड–क

(Long Answer Type Questions) / (दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

Note : Section 'A' contains four (04) long answer type questions of nine and half ($9\frac{1}{2}$) marks each. Learners are required to answer *two* (02) questions only.

नोट : खण्ड 'क' में चार (04) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए साढे नौ ($9\frac{1}{2}$) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Trace the curve :

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

वक्र का अनुरेखण कीजिए :

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

2. Prove that :

$$\beta(m, n) = \beta(m+1, n) + \beta(m, n+1)$$

सिद्ध कीजिए :

$$\beta(m, n) = \beta(m+1, n) + \beta(m, n+1)$$

3. Find polar form of the given Cartesian equation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

कार्तीय समीकरण $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ का ध्रुवीय रूपान्तरण कीजिए।

4. Solve :

$$x\,dx + y\,dy = a^2\left(\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}\right)$$

हल कीजिए :

$$x\,dx + y\,dy = a^2\left(\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}\right)$$

Section–B / खण्ड–ख

(Short Answer Type Questions) / (लघु उत्तरीय प्रश्न)

Note : Section 'B' contains eight (08) short answer type questions of four (04) marks each. Learners are required to answer *four* (04) questions only.

नोट : खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए चार (04) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Test the convergence of the following series :

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{3}{2.3.4}+\frac{5}{3.4.5}+.....$$

निम्नलिखित श्रेणी के अभिसरण का परीक्षण कीजिए :

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{3}{2.3.4}+\frac{5}{3.4.5}+.....$$

2. Prove that the maxima value of $\left(\frac{1}{x}\right)^x$ is $e^{\frac{1}{e}}$.

सिद्ध कीजिए कि $\left(\frac{1}{x}\right)^x$ का उच्चिष्ठ मान $e^{\frac{1}{e}}$ है।

3. Find the asymptotes of the curve :

$$4x^3-x^2y-4xy^2+y^3+3x^2+2xy-y^2-7=0$$

निम्नलिखित वक्र के अनन्तस्पर्शी ज्ञात कीजिए :

$$4x^3-x^2y-4xy^2+y^3+3x^2+2xy-y^2-7=0$$

4. Change the order of the double integral :

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\, dx\, dy$$

द्वि-समाकलन में समाकलन का क्रम परिवर्तन कीजिए :

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\, dx\, dy$$

5. Find the volume of the solid generated by the revolution of $r = 2a\cos\theta$ about the initial line.

$r = 2a\cos\theta$ को प्रारम्भिक रेखा के सापेक्ष घुमाने पर बने ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

6. Find the Pedal equation of the curve $x^2 + y^2 - 2ax = 0$.

वक्र $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ का पीडल समीकरण कीजिए।

7. Find the radius of curvature at the origin for the curve $3x^2 + 4x^3 - 12y = 0$.

वक्र $3x^2 + 4x^3 - 12y = 0$ की मूल बिन्दु पर वक्रता त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

8. Find the envelope of the ellipse $x = a\sin(\theta - \alpha)$, $y = b\cos\theta$ where α is a parameter.

दीर्घ वृत्त $x = a\sin(\theta - \alpha)$, $y = b\cos\theta$ जहाँ α प्राचल है, का अन्वालोप ज्ञात कीजिए।

Section–C / खण्ड–ग

(Objective Type Questions) / (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

Note : Section 'C' contains ten (10) objective type questions of half $\frac{1}{2}$ mark each. All the questions of this Section are compulsory.

नोट : खण्ड 'ग' में दस (10) वस्तुनिष्ठ प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए आधा $\frac{1}{2}$ अंक निर्धारित है। इस खण्ड के सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

Fill in the blanks :

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

1. $\int_0^\infty e^{-x}x^{-1/2}dx =$ .....

2. If $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)$, then $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y} =$ .....

   यदि $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)$, तो $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y} =$ .....

3. The function $y=(x-1)(x-2)^2$ is minima at .....

   फलन $y=(x-1)(x-2)^2$ का निम्निष्ठ मान बिन्दु ..... पर होगा।

4. If V is the volume enclosed by $x \geq 0, y \geq 0,\ z \geq 0$ and $x + y + z \leq 1$, then $\iiint_V x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} dx\, dy\, dz =$ ..... .

   यदि v समतलों $x \geq 0, y \geq 0,\ z \geq 0$ तथा $x + y + z \leq 1$ से परिबद्ध ठोस का आयतन है, तो $\iiint_V x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} dx\, dy\, dz =$ ..... ।

5. An algebraic curve of degree n cannot have more than ..... asymptotes.

   n घात के बीजीय वक्र के अनन्तस्पर्शियों की संख्या ..... से अधिक नहीं हो सकती।

6. If $m > -1$, $n > -1$, then $\int_0^{\pi/2} \cos^m \theta \sin^n \theta d\theta =$ ..... .

   यदि $m > -1,\ n > -1$, तो $\int_0^{\pi/2} \cos^m \theta \sin^n \theta d\theta =$ .....

7. Integrating factor of the differential equation $\frac{dy}{dx} + y \tan x = \sec x$ is ..... .

   अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + y \tan x = \sec x$ का समाकलन गुणांक ..... है।

8. Cauchy's remainder after n terms in the expansion of a function $f(x)$ by Taylor's theorem ..... .

   फलन $f(x)$ का टेलर प्रमेय से विस्तार करने पर n पदों के पश्चात् कौशी रूप का शेष पद ..... ।

9. $\Sigma \frac{1}{n^p}$ is convergent if ..... .

$\Sigma \frac{1}{n^p}$, अभिसारी होगी यदि .....

10. If for a curve $y = f(x)$, radius of curvature is $\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^n}{\frac{d^2y}{dx^2}}$ then n = ...

यदि $y = f(x)$ वक्र के लिए वक्रता त्रिज्या $\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^n}{\frac{d^2y}{dx^2}}$ हो तो n का मान .....होगा।