

P-130

Total Pages : 6

Roll No.

MT-08

Complex Analysis

समिश्र विश्लेषण

Bachelor of Science (BSC)

3rd Year Examination, 2023 (June)

Time : 2 Hours]

[Max. Marks : 35

Note : This paper is of Thirty Five (35) marks divided into two (02) Sections A and B. Attempt the questions contained in these sections according to the detailed instructions given therein. Candidates should limit their answer to the questions on the given answer sheet. No additional (B) answer sheet will be issued.

नोट : यह प्रश्नपत्र पैंतीस (35) अंकों का है जो दो (02) खण्डों क तथा ख में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों को हल करना है। परीक्षार्थी अपने प्रश्नों के उत्तर दी गई उत्तर-पुस्तिका तक ही सीमित रखें। कोई अतिरिक्त (बी) उत्तर पुस्तिका जारी नहीं की जायेगी।

SECTION-A/(खण्ड-क)

(Long Answer Type Questions)/(दीर्घ उत्तरों वाले प्रश्न)

Note : Section 'A' contains Five (05) long answer type questions of Nine and Half ($9\frac{1}{2}$) marks each. Learners are required to answer any Two (02) questions only.

($2 \times 9\frac{1}{2} = 19$)

नोट : खण्ड 'क' में पाँच (05) दीर्घ उत्तरों वाले प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए साढ़े नौ ($9\frac{1}{2}$) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Show that the function $f(z) = \sqrt{|xy|}$ is not regular at the origin, although Cauchy-Riemann equations are satisfied at the point.

दर्शाए के फलन $f(z) = \sqrt{|xy|}$ मूल बिंदु पर कोशी-रीमान समीकरण को संतुष्ट करता है परन्तु इस बिंदु पर विश्लेषिक नहीं है।

2. Show that transformation $w = \left(\frac{z - ic}{z + ic} \right)^2$, transform the upper half of the z -plane into the interior of a semicircle in the z -plane.

रूपांतरण $w = \left(\frac{z - ic}{z + ic} \right)^2$ के लिए प्रदर्शित कीजिए कि z -समतल

का ऊपरी अर्धभाग z -समतल में किसी अर्धवृत्त के अंतःभाग के संगत है।

3. Find the value of

मान ज्ञात कीजिए :

$$(a) \int_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz.$$

$$(b) \int_{|z|=1} \frac{\sin^6 z}{\left(z - \frac{\pi}{6}\right)^3} dz.$$

4. Discuss the singularities of the following functions

$$(a) f(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}.$$

$$(b) f(z) = \tan \frac{1}{z}.$$

$$(c) f(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \cos \frac{1}{z-2}.$$

निम्नलिखित फलनों की विचित्रताओं की विवेचना कीजिए :

$$(a) f(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}.$$

$$(b) f(z) = \tan \frac{1}{z}.$$

$$(c) f(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \cos \frac{1}{z-2}.$$

5. Prove that :

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

सिद्ध कीजिए :

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

SECTION-B/(खण्ड-ख)

(Short Answer Type Questions)/(लघु उत्तरों वाले प्रश्न)

Note : Section 'B' contains Eight (08) short answer type questions of Four (04) marks each. Learners are required to answer any Four (04) questions only. (4×4=16)

नोट : खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरों वाले प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए चार (04) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Find the modulus of $\frac{(1+i)(2+i)}{3+i}$.

$\frac{(1+i)(2+i)}{3+i}$ का मापांक ज्ञात कीजिए।

2. Define

(a) Bounded set.

(b) Closed set.

परिभाषित कीजिए :

(क) परिबंध समुच्चय।

(ख) संवृत समुच्चय।

3. Prove that $f(z) = z^2$ is uniformly continuous in the domain $|z| < 1$.

सिद्ध कीजिए कि प्रान्त $|z| < 1$ में $f(z) = z^2$ एकसमान संतत है।

4. Prove that the series $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$ is absolutely and uniformly convergent.

सिद्ध करो कि श्रेणी $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$ निरपेक्ष तथा एकसमान अभिसारी है।

5. Define following maps :

(a) Translation.

(b) Rotation.

(c) Magnification.

परिभाषित कीजिए निम्नलिखित फलनों को :

(क) स्थान्तरण।

(ख) घूर्णन।

(ग) आवर्धन।

6. State and prove Cauchy integral theorem.

कौशी के समाकलन प्रमेय को परिभाषित और सिद्ध कीजिए।

7. State and Prove Liouville theorem.

ल्यूवेल प्रमेय को परिभाषित और सिद्ध कीजिए।

8. Find the residue of $\frac{z^3}{(z-1)^4(z-2)(z-3)}$ at $z = 1$ and 2 .

$\frac{z^3}{(z-1)^4(z-2)(z-3)}$ का $z = 1$ और 2 अवशेष पर ज्ञात करें।
