P-129

Total Pages : 6 Roll No. ....

MT-07

Algebra

बीजगणित

Bachelor of Science (BSC)

3rd Year Examination, 2023 (June)

Time : 2 Hours] **[Max. Marks : 35**

Note : This paper is of Thirty Five (35) marks divided into two (02) Sections A and B. Attempt the questions contained in these sections according to the detailed instructions given therein. Candidates should limit their answer to the questions on the given answer sheet. No additional (B) answer sheet will be issued.

नोट : यह प्रश्नपत्र पैंतीस (35) अंकों का है जो दो (02) खण्डों क तथा ख में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों को हल करना है। परीक्षार्थी अपने प्रश्नों के उत्तर दी गई उत्तर-पुस्तिका तक ही सीमित रखें। कोई अतिरिक्त (बी) उत्तर पुस्तिका जारी नहीं की जायेगी।

SECTION–A/(खण्ड-क)

(Long Answer Type Questions)/(दीर्घ उत्तरों वाले प्रश्न)

Note : Section 'A' contains Five (05) long answer type questions of Nine and Half (9½) marks each. Learners are required to answer any Two (02) questions only.

(2×9½=19)

नोट : खण्ड 'क' में पाँच (05) दीर्घ उत्तरों वाले प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए साढ़े नौ (9½) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Prove that the set of all 2×2 matrices with real entries and determinant +1 is a group under matrix multiplication.

सिद्ध कीजिए कि, 2×2 क्रम के आव्यूह का समुच्चय जिनका सारणिक + 1 हो, गुणन के सापेक्ष एक ग्रुप बनाते हैं।

2. Prove that every finite group is isomorphic to a group of permutations.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक ग्रुप क्रमचय ग्रुप के आइसोमोरफिक होता है।

3. Let ϕ be a group homomorphism from G_1 to G_2. Then prove that $G_1/\,\mathrm{Ker}\phi$ is isomorphic to $\phi(G_1)$ where $\ker\phi$ denotes the kernel of ϕ.

माना ϕ ग्रुप G_1 से ग्रुप G_2 में होमोमोरफिज्म है, तो सिद्ध कीजिए कि, $G_1/\mathrm{Ker}\phi$ और $\phi(G_1)$ आइसोमोरफिक होते हैं?

4. Let R be a commutative ring with unity and let A be an ideal of R. Then prove that R/A is an integral domain if and only if A is prime.

माना R एक क्रमविनिमय तत्समक रिंग है, तो सिद्ध कीजिए कि R/A एक इंटीग्रल डोमेन होगा यदि और केवल यदि A अभाज्य हो।

5. Define the following terms with supporting examples :

(a) Normal Subgroup.

(b) Ring Homomorphism.

(c) Integral Domain.

(d) Field.

(e) Basis and Dimensions.

निम्नलिखित पदों को परिभाषित कीजिए :

(क) नार्मल सबग्रुप।

(ख) रिंग होमोमोरफिज्म।

(ग) इंटीग्रल डोमेन।

(घ) फील्ड।

(ङ) बेसिस और डायमेंशन।

SECTION–B/(खण्ड–ख)

(Short Answer Type Questions)/(लघु उत्तरों वाले प्रश्न)

Note : Section 'B' contains Eight (08) short answer type questions of Four (04) marks each. Learners are required to answer any Four (04) questions only. (4×4=16)

नोट : खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरों वाले प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए चार (04) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Give two reasons why the set of odd integers under addition is not a group.

विषम पुर्णांकों का समुच्चय का ग्रुप नहीं होने के लिए किन्हीं दो कारणों का उल्लेख कीजिए।

2. Prove that the center of a group is a subgroup of that group.

सिद्ध कीजिए कि किसी ग्रुप का केंद्र उसका सबग्रुप होता है।

3. Find all generators of Z_{20}.

Z_{20} के सभी जनक ज्ञात कीजिए।

4. Determine whether the following permutations are even or odd :

निम्न क्रमचयों के सम अथवा विषम होने की जाँच कीजिए :

(a) (13567)

(b) (12)(134)(152)

(c) (1243) (3521).

5. Prove that the set $Z[i] = \{a + bi: a, b$ are integers$\}$ is a subring of the complex numbers $\mathbb{C}$.

सिद्ध कीजिए कि $Z[i] = \{a + bi: a, b$ are integers$\}$ समिश्र संख्याओं $\mathbb{C}$ के सबरिंग हैं।

6. Show that the set $R^n = \{(a_1, a_2, ..., a_n): a_1, a_2, ..., a_n$ are real numbers$\}$ is a vector space over the field R under following operations :

दिखाइए कि $R^n = \{(a_1, a_2, ..., a_n): a_1, a_2, ..., a_n$ are real numbers$\}$ निम्न संक्रियाए के सापेक्ष एक वेक्टर स्पेस है

Vector Addition: $(a_1, a_2,..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$

Scaler Multiplication: $c(a_1, a_2,..., a_n) = (ca_1, ca_2, ..., ca_n)$.

7. Find the dimensions of the following vector spaces :

निम्न वेक्टर स्पेस की बिमाए ज्ञात कीजिए :

(a) $R^n(R)$

(b) $C^n(R)$

(c) $R^n(Q)$

(d) $C^n(Q)$.

8. Define the following terms :

(a) Linear Span.

(b) Linearly independent and linearly dependent vectors.

(c) Linear Transformation.

(d) Linear Subspace.

निम्नलिखित पदों को परिभाषित कीजिए :

(क) रैखिक स्पान।

(ख) रैखिक स्वतंत्र व निर्भर सदिश।

(ग) रैखिक ट्रांसफॉर्मेशन।

(घ) रैखिक सबस्पेस।