P-126

Total Pages : 5 Roll No. ....

MT-04

Real Analysis and Metric Space

वास्तविक विश्लेषण एवं दूरिक समष्टि

Bachelor of Science (BSC)

2nd Year Examination, 2023 (June)

Time : 2 Hours] **[Max. Marks : 35**

Note : This paper is of Thirty Five (35) marks divided into two (02) Sections A and B. Attempt the questions contained in these sections according to the detailed instructions given therein. Candidates should limit their answer to the questions on the given answer sheet. No additional (B) answer sheet will be issued.

नोट : यह प्रश्नपत्र पैंतीस (35) अंकों का है जो दो (02) खण्डों क तथा ख में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों को हल करना है। परीक्षार्थी अपने प्रश्नों के उत्तर दी गई उत्तर-पुस्तिका तक ही सीमित रखें। कोई अतिरिक्त (बी) उत्तर पुस्तिका जारी नहीं की जायेगी।

SECTION–A/(खण्ड-क)

(Long Answer Type Questions)/(दीर्घ उत्तरों वाले प्रश्न)

Note : Section 'A' contains Five (05) long answer type questions of Nine and Half (9½) marks each. Learners are required to answer any Two (02) questions only.

(2×9½=19)

नोट : खण्ड 'क' में पाँच (05) दीर्घ उत्तरों वाले प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए साढ़े नौ (9½) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. State and prove Bolzano Weierstrass Theorem for sequence.

बोलजानो वाइरस्ट्रास प्रमेय अनुक्रम के लिए का उल्लेख कीजिए और सिद्ध कीजिए।

2. State and prove Darboux Theorem.

डार्बू प्रमेय का उल्लेख कीजिए और सिद्ध कीजिए।

3. If A and B any two non-empty subsets of a metric space X. If $A \cap B \neq \phi$ then $d(A \cup B) \leq d(A) + d(B)$.

यदि A और B दूरिक समष्टि X के दो उपसमुच्च्य हैं।

यदि $A \cap B \neq \phi$ 0 तब $d(A \cup B) \leq d(A) + d(B)$.

4. Let (X, d) be a compact metric space. Then, a closed subset of X is compact.

मान लीजिए (X, d) एक संहत दूरिक समष्टि है तब X का संवृत उपसमुच्चय संहत होता है।

5. State and prove Archimedean Property for real numbers.

वास्तविक संख्याओं के लिए आर्कमीडियन गुणधर्म बताइए और सिद्ध कीजिए।

SECTION–B/(खण्ड-ख)

(Short Answer Type Questions)/(लघु उत्तरों वाले प्रश्न)

Note : Section 'B' contains Eight (08) short answer type questions of Four (04) marks each. Learners are required to answer any Four (04) questions only. (4×4=16)

नोट : खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरों वाले प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए चार (04) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Find the value of

मान ज्ञात कीजिए

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}.$$

2. A set is closed iff its complement is open.

एक समुचय संवृत होगा यदि और केवल यदि उसका पूरक विवृत है।

3. Prove that in a metric space (X, d) every convergent sequence is a Cauchy sequence.

दूरिक समष्टि में प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम एक कोशी अनुक्रम होता है।

4. Prove that the sequence $\left\{\frac{2n-7}{3n+2}\right\} \forall n \in N$ is convergent and find the limit.

सिद्ध कीजिए अनुक्रम $\left\{\frac{2n-7}{3n+2}\right\} \forall n \in N$ अभिसारी है और इसकी सीमा ज्ञात कीजिए।

5. Show that the function

$$f(x, y) = \begin{cases} (x+y)\cos\left(\frac{1}{x+y}\right); & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

is contmuous at the origin.

प्रदर्शित कीजिए कि फलन

$$f(x, y) = \begin{cases} (x+y)\cos\left(\frac{1}{x+y}\right); & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

मूल बिन्दु पर संतत है।

6. Show that the function $f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right); & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases}$

is continuous at the $x = 0$ but not differentiable.

प्रदर्शित कीजिए कि फलन $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right); & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases}$ $x = 0$

पर संतत है परन्तु अवकलनीय नहीं है।

7. Prove that the series $\sum \dfrac{x}{(n + x^2)^2}$ $\forall x \geq 0$ is uniformly convergent.

प्रदर्शित कीजिए कि श्रेणी $\sum \dfrac{x}{(n + x^2)^2}$ $\forall x \geq 0$ एक समान अभिसारी है।

8. Show that the function

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & \text{if } x \text{ is rational} \\ 1 - x, & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

is not Riemann Integrable at interval [0, 1].

प्रदर्शित कीजिए कि फलन

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & \text{if } x \text{ is rational} \\ 1 - x, & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

अन्तराल [0, 1] पर रीमान समाकलनीय नहीं है।