इकाई – 1 वास्तविक अंक प्रणाली एवं समुच्चय सिद्धान्त

इकाई संरचना

1.1 प्रस्तावना

अर्थशास्त्र के अन्तर्गत अध्ययन किए जाने वाले विषयों में परिमाणात्मक विश्लेषण सर्वाधिक महत्वपूर्ण होता है। अर्थशास्त्र के सिद्धान्तों को गणितीय संदर्शों द्वारा प्रभावी रूप से व्यक्त किया जाता है किन्तु सम्पूर्ण गणितीय प्रक्रिया के मूल में वास्तविक अंक प्रणाली होती है। इसी कारण अर्थशास्त्र के विद्यार्थीयों के लिए वास्तविक अंक प्रणाली से सुपरिचित होना नितान्त आवश्यक है। अर्थशास्त्र के अनेक विषय गणनाओं पर आधारित है जैसे– लागत, लाभ, आय, सन्तुष्टि, बचत आदि। साथ ही अनेक संदर्भों जैसे– मांग, पूर्ति, मूल्य, उपयोगिता, लागत आदि के ऋणात्मक मान नहीं हो सकते हैं। इन तथ्यों को भली प्रकार से समझने में वास्तविक अंक प्रणाली का ज्ञान बहुत सहायक होता है।

इसी प्रकार अर्थशास्त्र में समुच्चय की अवधारणा एवं समुच्चय सिद्धान्त का भी महत्वपूर्ण उपयोग होता है। जटिल आर्थिक क्रियाओं को सरलता से समझने के लिए आर्थिक क्रियाओं तथा उससे जुडी वस्तुओं का वर्गीकरण करके विश्लेषण करने से उन्हे समझना सरल हो जाता है। यह वर्गीकरण वस्तुतः प्रायः समुच्चय अवधारणा पर आधारित होता है। जैसेः– उपभोक्ता वस्तुएं, आगतें, पूँजीगत वस्तुएँ, बाजार शक्तियाँ, मौद्रिक संक्रियाएँ, राजकोषीय संक्रियाएँ आदि।

वास्तविक अंक प्रणाली व समुच्चय सिद्धान्त की अर्थशास्त्र के अध्ययन में महती भूमिका को ध्यान में रखते हुए प्रस्तुत इकाई में आपको इनसे अवगत कराया जा रहा है।

1.2 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात–

(i) वास्तविक अंक प्रणाली एवं समुच्चय सिद्धान्त की अवधारणा से अवगत हो जाएगें।

(ii) वास्तविक अंक प्रणाली एवं समुच्चय सिद्धान्त के माध्यम से अर्थशास्त्र में विभिन्न गणितीय विश्लेषण को समझने योगय हो जाएंगे।

1.3 वास्तविक अंक प्रणाली

1.3.1 प्राकृतिक संख्याएँ $(\boldsymbol{N})$:– जैसे कि हम सभी ने छोटी कक्षाओं में गिनती के रूप में संख्याओं $1,2,3,4,5 - - - -$ का अध्ययन किया है, इन संख्याओं को प्राकृतिक संख्या कहतें है। क्योंकि प्राकृतिक वस्तुओं का परिमाण इन्ही संख्याओं के द्वारा दर्शाया

जाता है। उदाहारण के लिए प्राकृतिक रूप से एक पेड़, दो पेड़ या पाँच भैंस ही उपलब्ध होती है। हम 2) व्यक्ति, या 3(बकरी की कल्पना प्राकृतिक रूप से नहीं कर सकते हैं।

1.3.2 पूर्णांक (I):– पूर्णांक धनात्मक तथा ऋणात्मक दोनों प्रकार के होते हैं प्राकृतिक संख्याएँ धनात्मक पूर्णांक होती हैं, इसी प्रकार इनके ऋणात्मक मान जैसे— $1, -2, -3,$ **……….** आदि ऋणात्मक पूर्णांक होते हैं। इनके अतिरिक्त शून्य (0) भी पूर्णांक में आता है। शून्य न तो धनात्मक न तो ऋणात्मक होने के कारण अद्वितीय है। इस प्रकार सभी प्राकृतिक संख्याओं के ऋणात्मक मानों तथा शून्य को सम्मिलित रूप से पूर्णांक कहते हैं।

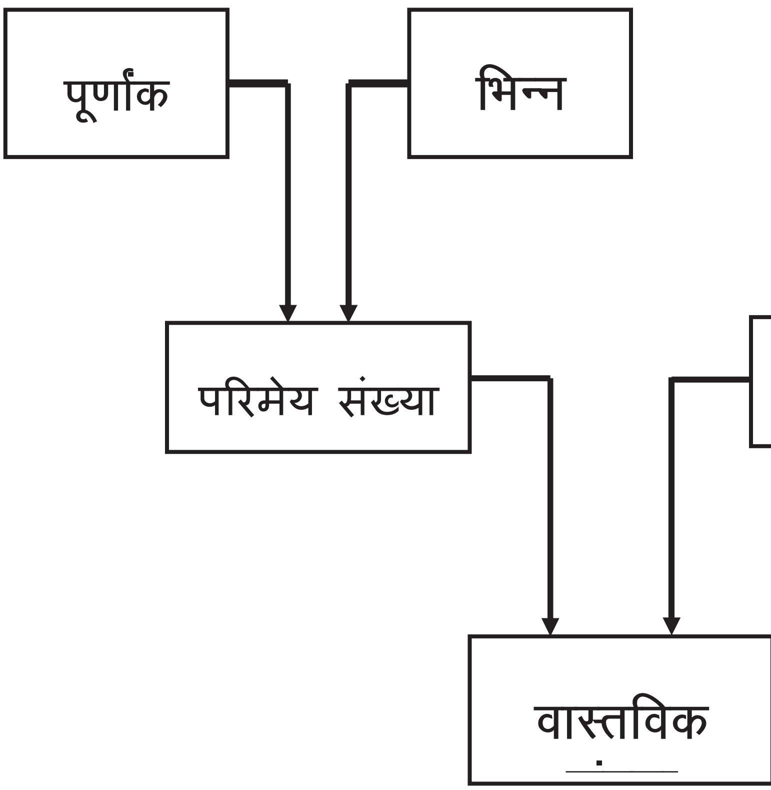
1.3.3 परिमेय एवं अपरिमेय संख्याएँ:– अनेक ऐसी संख्याएं जो पूर्णांक नहीं होती हैं जैसे भिन्न $1\frac{1}{3}, -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{7}}, \sqrt{\mathbf{2}}$ आदि ये ऐसी संख्याएं है जिनके मान पैमाने पर दो पूर्णाकों के बीच आते हैं। $1\frac{1}{3}$ का मान 3 एवं 4 के बीच, $-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{7}}$ का मान शून्य $'0'$ तथा $-\mathbf{1}$ के बीच एवं कर्णी 2 का मान 1 तथा 2 के बीच आता है। इस प्रकार हम कह सकतें है कि पूर्णांक सभी सम्भव संख्याओं को व्यक्त नहीं करते हैं।

1.3.3.1 परिमेय संख्या ($\boldsymbol{Q}$): परिमेय संख्या वे संख्याएं है जिनके परिमाण को भिन्न के रूप में पूर्णतः दर्शाया जा सकता है। परिमेय संख्यायें धनात्मक अथवा ऋणात्मक हो सकती है। चूँकि पूर्णांको को भी भिन्न के द्वारा व्यक्त किया जा सकता है (यथा, 7 को $\frac{7}{1}$ अथवा -4 को $-\frac{4}{1}$ के द्वारा व्यक्त किया जा सकता है) अतः पूर्णांक भी परिमेय संख्याओं के अन्तर्गत आते हैं।

1.3.3.2 अपरिमेय संख्याएं : परिमेय संख्याओं को जानने के पश्चात् यह स्पष्ट हो जाता है कि अनेक ऐसी संख्याएं भी होती है, जिनको भिन्न के रूप में व्यक्त करना सम्भव नहीं होता है इन संख्याओं को अपरिमेय संख्या कहते हैं, जैसे $\sqrt{\mathbf{2}} = 1.4142 \ldots\ldots\ldots\ldots$।

1.3.4. वास्तविक संख्या ($\boldsymbol{R}$): प्रत्येक अपरिमेय संख्या दो परिमेय संख्याओं के मध्य स्थित होती है। अतः जिस प्रकार परिमेय संख्याएं दो पूर्णाको के बीच के अन्तराल को भरती है उसी प्रकार अपरिमेय संख्याएं परिमेय संख्याओं में मध्य के अन्तरालों को भरती हैं।

संख्याओं द्वारा रिक्तताओं को भरने की इस प्रक्रिया के परिणमस्वरूप अंको का एक सातत्य प्राप्त होता है। इन सभी संख्याओं को मिला कर वास्तविक अंक कहा जाता है अर्थात् प्राकृतिक संख्याएं, पूर्णांक, परिमेय व अपरिमेय संख्याएं सभी वास्तविक संख्याओं के अन्तर्गत आती हैं। वास्तविक संख्याओं के समुच्चय को R के द्वारा दर्शाया जाता है। जब सभी वास्तविक संख्याओं को एक सरल रेखा पर दर्शाया जाता है (विस्तारित पैमाने के रूप में) तो इसे वास्तविक रेखा कहते हैं।



चित्र सं0 1

1.4 समुच्चय सिद्धान्त

1.4.1 समुच्चय की अवधारणः– समुच्चय से तात्पर्य वस्तुओं के एक सुपरिभाषित समूह या संग्रह से है। सुपरिभाषित से तात्पर्य उस विशिप्टता के सुपरिभाषित होने से है जिसके आधार पर इन वस्तुओं को संग्रहीत कर एक समूह में रखा जाता है। उदाहरण के लिए फुटबाल टीम अर्थात फुटबाल खिलाडियों का समुच्चय, इस समुच्चय का आधार हर खिलाडी द्वारा फुटबाल खेले जाने की विशिष्टता है जो सुपरिभाषित है। जबकि कद, रंग, चेहरा आदि भिन्न– भिन्न हो सकते हैं।

समुच्चय में संग्रहीत प्रत्येक वस्तु को समुच्चय का अवयव कहते हैं। समुच्चय को दो वैकल्पिक पद्धतियों से व्यक्त किया जाता है।

(1) प्रथम पद्धति में समुच्चय के सभी अवयवयों को मँझले कोष्ठक के भीतर सूचिबद्ध कर दिया जाता है जैसे :–$S = \{-3,0,2,7\}$ समुच्चय को व्यक्त करने की इस विधि को सूची विधि कहते हैं।

(2) गुण विधि, समुच्चय निर्माण विधि अथवा वर्णन विधि :– इस विधि में समुच्चय के अवयवों को सूचिबद्ध करने के स्थान पर अवयवों के उस विशिष्ट गुण द्वारा समुच्चय को परिभाषित किया जाता है जो समुच्चय निर्माण का आधार बनता है। सामान्यतया इस विधि का प्रयोग तब किया जाता है जब समुच्चय के अवयवों की संख्या बहुत अधिक हो।

उदाहरण के लिए–$R = \{$सभी वास्तविक संख्याएं$\}$ इस समुच्चय को

$R = \{x : x$ एक वास्तविक संख्या ळें$\}$ लिखते है।

1.4.2 परिमित एवं अपरिमित समुच्चय : वे समुच्चय जिनके अवयवों की संख्या परिमित होती है उन्हे परिमित समुच्चय कहते हैं।

जैसेः– $S = \{8, -3, 0, 2, 7\}$

इसके विपरीत अपरिमित समुच्चय वे समुच्चय होते है जिनके अवयवों की संख्या अपरिमित होती है। जैसेः– $R = \{x : x$ एक वास्तविक संख्या है$\}$

परिमित समुच्चय के अवयवों की एक – एक करके गणना की जा सकती है अर्थात परिमित अवयवों के समुच्चय गणनीय होते है जैसे उपरोक्त समुच्चय S। अपरिमित

समुच्चय के एक – एक अवयव की गणना करना सम्भव नही होता है अर्थात अपरिमित समुच्चय के अवयवों की संख्या अगणनीय होती है, जैसे :– उपरोक्त समुच्चय R।

समुच्चय के अवयवों की सदस्यता को ग्रीक अक्षर ϵ (अप्सायलन) की सहायता से इंगित किया जाता है। उदाहरण के लिए -3 उपरोक्त समुच्च S का एक अवयव है जिसे हम $' - 3 \epsilon S'$ द्वारा इंगित करते हैं, तथा इसे $' - 3$ समुच्चय S' का एक सदस्य है' पढते हैं। इसी प्रकार $\sqrt{2}$ एक वास्तविक संख्या होने के नाते उपरोक्त समुच्चय R का एक अवयव है जिसे हम $\sqrt{2} \quad \epsilon R$ द्वारा इंगित करते हैं। किन्तु $\sqrt{2}$समुच्चय S का अवयव नहीं है, इस तथ्य को इंगित करने के लिए हम $\sqrt{2} \ \epsilon S$ लिखते हैं, जिसका अर्थ है कि $\sqrt{2}$समुच्चय S का अवयव नहीं है।

इसी प्रकार कथन $'x$ एक वास्तविक संख्या है' को $x \epsilon R$ लिखते हैं जहाँ R सभी वास्तविक संख्याओं के समुच्चय का प्रतीक चिन्ह है।

1.4.3 रिक्त समुच्चयः– यह एक ऐसा समुच्चय होता है जिसमें कोई भी अवयव नहीं होता है अर्थात $\{= \{\}$। यदि समुच्चय में एक भी अवयव है तो उसे रिक्त समुच्चय नहीं कहा जाएगा। कोई भी अवयव न होने के कारण रिक्त समुच्चय सभी समुच्चयों का उप समुच्चय होता है।

1.4.4 एकल समुच्चयः– ऐसे समुच्चय जिनमे केवल एक ही अवयव होता है। जैसेः– $\{0\}, \{a\}$, आदि।

1.4.5 समुच्चयों का समुच्चयः– जब किसी समुच्चय के अवयव स्वयं में एक समुच्चय हो तो उसे समुच्चयों का समुच्चय कहते हैं। उदाहरणार्थ– भारत की अर्थव्यवस्था विश्व की सभी अर्थव्यवस्थाओं के समुच्चयों का एक अवयव है। किन्तु भारत की अर्थव्यवस्था स्वयं में विभिन्न प्रान्तों की अर्थव्यवस्थाओं का एक समुच्चय है। इसी प्रकार एक प्रान्त की अर्थव्यवस्था उसके जिलों की अर्थव्यवस्थाओं का समुच्चय है।

1.4.6 समष्टीय समुच्चयः– यदि किसी निश्चित सन्दर्भ में सभी समुच्चय किसी निश्चित समुच्चय के उपसमुच्चय हो तो इस निश्चित समुच्चय को समष्टीय समुच्चय कहा जाता है। इसे अंग्रेजी भाषा के अक्षर $'U'$ द्वारा दिखाया जाता है। उदाहरणार्थ – यदि वास्तविक

संख्याओं का अध्ययन कर रहे हो तो सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय समष्टीय समुच्चय कहा जाएगा। इसी प्रकार यदि भारत की आर्थिक गतिविधियों का संदर्भ हो तो भारतीय अर्थव्यवथा समष्टीय समुच्चय होगी।

1.4.7 समुच्चयों के बीच सम्बन्धः– दो समुच्चयों के मध्य विविध प्रकार के सम्बन्ध स्थापित हो सकते हैं।

1.4.7.1 समसमुच्चयः– यदि दो समुच्चयों $'A'$ तथा $'B'$ के अवयव समान हो तो A तथा B को समसमुच्चय कहा जाता है। अर्थात् $[x \in A = x \in B$ तथा $x \in B = x \in A]$

उदाहरणार्थ यदि $A = \{3, \pi, 8, c\}$ तथा $B = \{8, c, 3, \pi\}$ तो $A = B$ होगा अर्थात $'A'$ तथा $'B'$ समसमुच्चय है। स्मरणीय है कि समुच्चय के अवयवों के क्रम का कोई महत्व नही होता। पुनः दो समुच्चयों A' तथा $'B'$ मे यदि एक भी ऐसा अवयव हो जो $'A'$ तथा $'B'$ में से किसी एक का ही सदस्य है तो $'A'$ तथा $'B'$ समुच्चय नहीं होगें।

उदाहरणार्थः– $A = \{1, x, 2, 3\}$

$B = \{1, y, 2, 3\}$

1.4.7.2 उपसमुच्चय, उचित उपसमुच्चय एवं घात समुच्चयः– यदि दो समुच्चयों $'A'$ तथा $'B'$ में से $'A'$ के सभी अवयव $'B'$ के भी अवयव हो तो $'A'$, $'B'$ का उपसमुच्चय होगा जिसे निम्न प्रकार लिखा जाता हैः– $A \subseteq B$

$A \subseteq B$ यदि और केवल यदि $x \in A = x \in B$

यदि $A \subseteq B$ तथा $\subseteq$ तो A और B सम समुच्चय होंगे।

उचित उपसमुच्चयः– यदि दो समुच्चयों A तथा B में A के सभी अवयव B के भी अवयव हों अर्थात $A \subseteq B$ किन्तु B के सभी अवयव A के अवयव न हो अर्थात $A \subseteq B$ तो A उचित उपसमुच्चय होगा B का जिसे $A \subset B$ लिखा जाता है।

उदाहरणार्थः– यदि $A = \{1, 3, a, b\}$ तथा $B = \{1,3, a, b, c\}$ है तो $A \subset B$ तथा B, A का अधिसमुच्चय होगा जिसे $B \supset A$ लिखा जाता है। इसी प्रकार प्राकृतिक संख्याएं $\subset$ पूर्णांक $\subset$ वास्तविक संख्या □ ⊂ □ ⊂ □

किसी समुच्चय □ के सभी उपसमुच्चयों की कुल संख्या $2^{□}$ (जहाँ □ □ के कुल अवयवो की संख्या है) होती है।

उदाहरणार्थः– यदि □ $= \{1,3,□,□\}$ तो □ के प्रत्येक अवयव को अलग–अलग धारण करने वाले उपसमुच्चय $\{1\},\{3\},\{□\},\{□\}$। इसी प्रकार दो–दो अवयवों को धारण करने वाले उपसमुच्चय $\{1,3\},\{1,□\},\{1,□\},\{3,□\}$ – – – – – – – – आदि। इसी प्रकार तीन तीन अवयवों को धारण करने वाले उप समुच्चय बनेंगे। साथ ही समुच्चय □ स्वयं का एक उपसमुच्चय होता हैं। इसके अतिरिक्त किसी भी समुच्चय को सबसे छोटा उपसमुच्चय रिक्त समुच्चय (जिसे {द्वारा दिखाया जाता है) होता है। उपर्युक्त उदाहरण मे कुल उप समुच्चयों की संख्या $2^4 = 16$ होगी। सभी उपसमुच्चयों के समुच्चय को घात समुच्चय कहते है। इसे $P\ (A)$ लिखते है।

दो समुच्चयों के तीसरे प्रकार का सम्बन्ध विसंघीतता का होता है।

1.4.7.3 विसंघीत समुच्चयः– यदि समुच्चयों A तथा B के मध्य एक भी अवयव उभयनिष्ठ न हो तो A और A को विसंघीत समुच्चय कहेंगे। उदाहरणार्थः–

$A = \{a : a \in$ धन पूर्णांक$\}$

$A = \{b : b \in$ ऋण पूर्णांक$\}$

दो समुच्चयों के बीच चौथे प्रकार का सम्बन्ध ऐसा भी हो सकता है जिसमें दोंनो समुच्चयो में कुछ अवयव उभयनिष्ठ हो किन्तु प्रत्येक समुच्चय में कुछ अवयव उसके अपने विशिष्टि अवयव हों। ऐसी स्थिति में समुच्चयों A और B न तो विसंघीत है न दोंनो में से कोई समुच्चय दूसरे समुच्चय का उपसमुच्चय है और न ही दोनो समुच्चय सम–समुच्चय है। उदाहरणार्थ $A = \{1,2,3,4\}$ तथा $B = \{2,3,7,8\}$

1.4.8 समुच्चय संक्रियाएंः– समुच्चयों के मध्य कुछ महत्वपूर्ण संक्रियाएं होती है जैसे संघ, प्रतिच्छेद, पूरक तथा अन्तर।

1.4.8.1 समुच्चयों का संघः– दो समुच्चयों A और B का संघ एक ऐसा समुच्चय होता है जिसके अवयव या तो A या B या A और B के उभयनिष्ठ अवयव होते है। इसे $A\,UB$ लिखते है। उदाहरणार्थ– $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,3,7,8\}$, $AUB =$

$\{1,2,3,4,7,8\}\, AUB = \{x : x \in A$ अथवा $x \in B\}$ देखें चित्र– 2 जिसका आच्छादित भाग AUB को दर्शाता है।

1.4.8.2 समुच्चयों का प्रतिच्छेदः– दो समुच्चयों A तथा B के उभयनिष्ठ अवयवों का समुच्चय A तथा B का प्रतिच्छेद होता है इसे $A \cap B$ लिखते है।

उदाहरणार्थः– $A = \{1,2,3,4\}, B = \{2,3,7,8\}$

$A \cap B = \{2,3\}$

$A \cap B = \{x : x \in A$ तथा $x \in B\}$ देखें चित्र– 3 जिसका आच्छादित भाग $A \cap B$ को दर्शाता है।

1.4.8.3 पूरक समुच्चयः– समुच्चय A का पूरक समुच्चय $(\bar{A})$ ऐसे अवयवों का समुच्चय होता है जो समष्टिय समुच्चय के अवयव होते हैं किन्तु समुच्चय A के अवयव नहीं होते है।

$\bar{A} = \{x : x \in U$ और $x / \in A\}$ देखें चित्र– 4 जिसका आच्छादित भाग $\bar{A}$ को दर्शाता है।

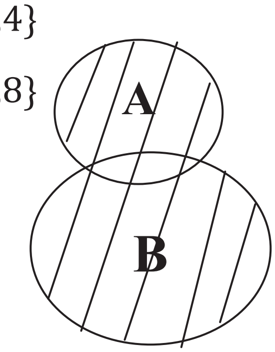
1.4.8.4 दो समुच्चयों का अन्तर :– दो समुच्चयों A तथा B का अन्तर वह समुच्चय होता है जिसके अवयव A के वे अवयव होते है जो B के अवयव न हो। इसे $A - B$ द्वारा दिखाया जाता है। $A - B = \{x : x \in A$ तथा $x \in B\}$ देखें चित्र– 5 जिसका आच्छादित भाग $A - B$ को दर्शाता है।

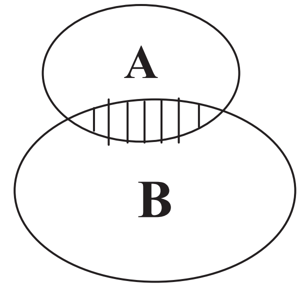
उदाहरणार्थः– $A = \{1,2,3,4\}, B = \{2,3,7,8\}$

$A - B = \{1,4\}$

$B - A = \{7,8\}$

1.4.8.5 वेन आरेख से निरूपणः–





c

चित्र संख्या–2

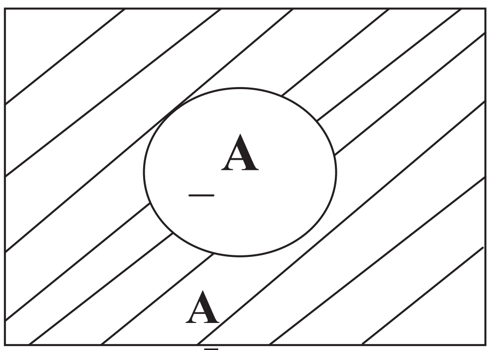
A U B

संघ

चित्र संख्या–3

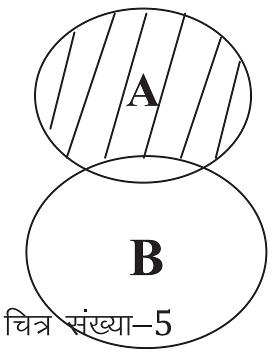
। ∩ ठ

प्रतिच्छेद



$\bar{A}$

पूरक



चित्र संख्या–5

$A - B$

अन्तर

1.5. क्रमित युगम एवं सम्बन्ध

एक समुच्चय $\{a, b\}$ को लिखते समय हम अवयवों a और इ के क्रम को ध्यान में नहीं रखते हैं क्योंकि समुच्चय की परिभाषा के अनुसार समुच्चय $\{a, b\} = \{b, a\}$। किन्तु कभी–कभी वस्तुओं के कुछ ऐसे युगमों का विचार करना पड़ता है जिनमें क्रम महत्वपूर्ण होता है। उदाहरण के लिए यदि हम देशों और उनकी राजधानियों के युगम बनायें तो उनको एक निश्चित क्रम में रखना अनिवार्य होगा जैसे–(भारत, दिल्ली), (पाकिस्तान, इस्लामाबाद), (नेपाल, काठमाण्डू) आदि। यदि इनमें से किन्हीं एक दो जोड़ों में अवयवों का क्रम बदल जाये तो वह युगम निरर्थक हो जायेंगे। इसी प्रकार निर्देशांक ज्यामिती में यदि किसी बिन्दु को क्रमित युगम $(2,7)$ से दर्शाया गया हो तो इसका अर्थ है कि उस बिन्दु का X निर्देशांक 2 तथा Y निर्देशांक 7 है। अब यदि इस क्रमित युगम का क्रम बदलकर $(7,2)$ लिख दें तो यह एक भिन्न बिन्दु को इंगित करेगा जिसका X निर्देशांक 7 तथा Y निर्देशंक 2 होगा। अर्थात क्रमित युगम $(a, b) \neq (b, a)$। क्रमित युगम (a, b) क्रमित युगम (b, a) के बराबर तभी होगा जब $= b$ हो। इसी प्रकार $(a, b) =$

$(c,d) \Leftrightarrow a=c$ तथा $b=d$। क्रमित युगमों की यह अवधारणा दो से अधिक अवयवों वाले समुच्यों पर भी लागू होती है तथा इन्हें क्रमित समुच्च भी कहते हैं।

1.5.2 कार्तीय गुणनः—

यदि समुच्च $A=\{a_i\}$ तथा समुच्चय $B=\{b_j\}$ जहां $i=1,2,3......m$ तथा $j=1,2,3.....n$ हो तो $A \ \ xB = \{a_i, b_j\}$, जहां $a_i \in$ तथा $b_j \in B$ तथा (a_i, b_j) क्रमित युगम है। इस प्रकार AxB (a,b) के सभी सम्भव क्रमित युगमों का एक समुच्चय होता है जिसे A क्रास B पढ़ते है तथा A तथा B का कार्तीय गुणनफल कहते है। जिसका नामकरण गणितज्ञ, दार्शनिक $MsdkrZ$ $(Descartes)$ के नामे पर किया गया है।

उदाहरणः यदि समुच्च $A=\{1,5\}$ तथा समुच्चय $B=\{2,4,6\}$ तो AxB ऐसे क्रमित युगमों का समुच्चय होगा जिनका पहला अवयव समुच्चय A का सदस्य हो तथा दूसरा अवयव समुच्चय B का अवयव हो अर्थात $AxB = \{(1,2),$ $(1,4),(1,6),(5,2),(5,4),(5,6)$ यहां । में दो अवयव तथा B में तीन अवयव है फलतः AxB में छः अवयव है अर्थात यदि $A=\{a_i\}$ जहाँ $i=1,2,3.....m$ तथा $B=\{b_j\}$ जहां $j=1,2,3......n$ हो तो समुच्चय AxB में mxn अवयव (क्रमित युगम) होंगे। यहां यह ध्यान देने योगय है कि $AxB \neq BxA$ क्योंकि $AxB = \{a_i, b_j\}$ जबकि $BxA = \{(b_j, a_i)\}$ जिसे हम क्रमित युगम की अवधारणा में दिये गये निर्देशांक ज्यामिति के उदाहरण से भली प्रकार समझ सकते हैं। यदि हम अपने दायरे को व्यापक बनाये और यह मान लें कि ˙ तथा b वास्तविक संख्यायें है तो हम कहेंगे कि ˙$\in R$ तथा $b \in R$ तथा कार्तीय गुणनफल $AxB = \{(a,b): a \in R$ तथा $b \in R\}$ जो वास्तविक मानों वाले अवयवों के सभी क्रमित युगमों के समुच्चय को प्रदर्शित करेगा। इनमें से प्रत्येक क्रमित युगम कार्तीय निर्देशांक समतल पर एक अद्वितीय बिन्दु को इंगित करता है। इसी प्रकार, कार्तीय समतल का प्रत्येक बिन्दु के अनुरूप एक अद्वितीय क्रमित युगम प्राप्त होता है। यदि अब हम समुच्चय A को X निर्देशांकों का समुच्चय और B को Y निर्देशांकों का समुच्चय

मान ले तो उक्त कार्तीय गुणनफल AxB को हम $Xxy = \{(x, y): xeR$ तथा $yER\}$ लिख सकते हैं जिसे निम्न चित्र द्वारा समझा किया जा सकता है।

इस दोहरी अद्वियतता के कारण कार्तीय गुणनफल में क्रमित युगमों के समुच्चय तथा समकोणीय निर्देशांक समतल के बिन्दुओं के बीच एकैकी अनुरूपता ($On\ to\ one\ correspondence$) होती है। इस अवधारणा का विस्तार करके हम तीन समुच्चयों $x, y,$ तथाz में कार्तीय गुणनफल $XxYxZ$ को परिभाषित कर सकते है जिसका प्रत्येक त्रि–अवयवयी युगम त्रिआयामी व्याप ($Three - Dimensional\ Space$) के एक अद्वितीय बिन्दु को निर्दिष्ट करेगा।

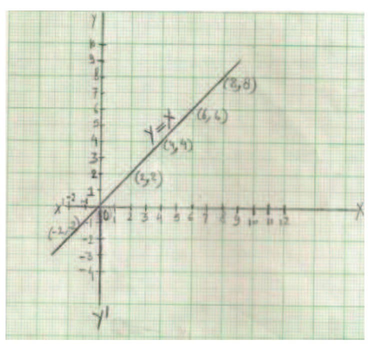
1.5.3 सम्बन्धः–क्रमित युगमों के विषय में अध्ययन करने के पश्चात हम यह कह सकते हैं कि क्रमित युगमों के समुच्चय में कुछ अथवा सभी क्रमित युगम ऐसे हो सकते है जिनके अवयवों के मध्य एक निश्चित सम्बन्ध स्थापित किया जा सकता है। उदाहरणार्थ यदि हम पिछले अनुच्छेद में देंखें तो (भारत, नई दिल्ली), (पाकिस्तान, इस्लामाबाद) आदि सभी क्रमित युगमों के अवयवों के बीच एक निश्चित सम्बन्ध देश और उसकी राजधानी है।

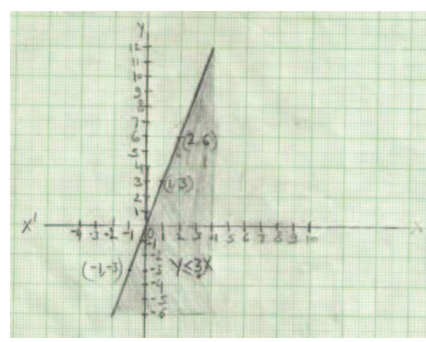
इसी प्रकार दूसरे उदाहरण में समुच्चय AxB के क्रमित युगमों $\{(1,2), (1,4), (1,6)$ तथा $(5,6)\}$ को लेकर एक ऐसा उपसमुच्चयै बनाया जा सकता है जिसके सदस्य सभी क्रमित युगमों के प्रथम एवं द्वितीय अवयव के बीच एक निश्चित सम्बन्ध R परिभाषित होता है। जिसे $a < b$ जहाँ $a \in A$ तथा $b \in B$ के द्वारा व्यक्त किया जाता है।

व्यापक रूप में यदि (a, b) के अवयव a और b किसी सम्बन्ध R से जुड़े हैं तो इसे aR_b लिखा जाता है तथा इसे a संबंध b पढ़ते है। यदि a और b सम्बन्ध R से सम्बन्धित नहीं है तो इसे aRb से निरूपित करते हैं और $'a$ नहीं सम्बन्धित b' पढ़ते हैं। उदाहरण के लिए AxB के वे सदस्य जो उपसमुच्चयै के सदस्य नहीं हैं– $\{(5,2)$ तथा $(5,4)\}$ उपरोक्त सम्बन्ध R से सम्बन्धित नहीं है। अतः हम इन्हें ${}_5R_2$ तथा ${}_5R_4$ लिख सकते हैं।

1.5.2 में कार्तीय निर्देशांक समतल पर X तथा y निर्देशांकों के क्रमित युगम के उदाहरण को लेकर सम्बन्ध की अवधारणा को अधिक व्यापकता से समझा जा सकता है। उक्त उदाहरण में कार्तीय गुणनफल $XxY = \{(x, y);\ x \in R$ तथा $y \in R\}$ x तथा y चरों के वास्तविक मानों वाले सभी सम्भव क्रमित युगमों का समुच्चय है। इस समुच्च्य के अनेक ऐसे उपसमुच्चय बनाये जा सकते हैं जिनके सदस्य क्रमित युगमों के अवयवों के बीच एक निश्चित सम्बन्ध हो।

उदाहरण के लिएः समुच्चय $\{(x, y);\ y = x\}$ के $(2,2), (1,1), (0,0), (-1,-1), (-2,-2)$ आदि सदस्य होंगें। ग्राफीय दृष्टि से यह एक सरल रेखा $y = x$ के बिन्दुओं का समुच्चय होगा। इसी प्रकार समुच्चय $\{(x, y);\ y < 3x\}$ जिसके सदस्य $(2,6), (2,2), (2,-1), (1,3),$ $(1,1), (1,-2)$ $(-1,-3), (-1,-6), (-1,-9)$ इत्यादि होंगे। सामूहिक रूप से चित्र में अंकित रेखा $y = 3x$ के बिन्दुओं तथा उसके नीचे आने वाले क्षेत्र में सभी बिन्दु, जिन्हें आच्छादित किया गया है, द्वारा प्रदर्शित होंगें।





उपरोक्त दोनो ही उदाहरण में x तथा y चरों के बीच एक निश्चित किन्तु पृथक सम्बन्ध है। जहां $y < 3x$ सम्बन्ध में x के एक ही मान जैसे–2 के लिए y के 6 और उससे कम अनेक मान प्राप्त होंगे। वहीं $y = x$ सम्बन्ध में x के प्रत्येक मान के लिए y का एक अद्वितीय मान ही प्राप्त होगा। ऐसे सम्बन्ध जिनमें x चर के किसी एक मान के लिए y चर का एक अद्वितीय मान ही प्राप्त होता है उन्हें फलनात्मक सम्बन्ध कहते हैं जिसे

$y = f(x)$ लिखते हैं जिसके बारे में हम अगली इकाई में विस्तार से अध्ययन करेगें। इसके विपरीत, $y < 3x$ एक सम्बन्ध तो है किन्तु एक फलनात्मक सम्बन्ध नहीं है।

1.6 अभ्यास प्रश्न

1. निम्नलिखित समुच्चयों को प्रतीकात्मक भाषा में लिखिए

क) 7 से बडी 36 से छोटे धन पूर्णांको का समुच्चय

ख) 3 से बडी 85 से छोटी परिमेय संख्याओं का समुच्चय

ग) सभी गैर–ऋणात्मक पूर्णांको का समुच्चय

घ) कृषि में प्रयोग होने वाली आगतों का समुच्चय

ड) क्रमित युगमों का समुच्चय जिनके अवयव परिमेय संख्या है।

2. रिक्त स्थानों को भरिए।

क) $1/7$ एक .... संख्या है।

ख) शून्य एक .... पूर्णांक है।

ग) सभी .... संख्याएं पूर्णांक होती हैं।

घ) सभी पूर्णांक, परिमेय, तथा अपरिमेय संख्याएं मिलकर ....संख्याओं का समुच्चय बनाती हैं।

ड.) दो समुच्चयो के प्रतिच्छेद में दोनों समुच्चयों के ....अवयव होते है।

च) दो समुच्चयों का अन्तर प्रथम समुच्चय में से .... अवयवों को हटाकर प्राप्त किया जाता है।

छ) किसी समुच्चय के सभी सम्भव उपसमुच्चयों के समुच्चय को .... कहते हैं।

ज) विसंघीत समुच्चयों का प्रतिच्छेद ....होता है।

झ) जिस समुच्चय में कोई भी अवयव नहीं होता उसे .... कहते है तथा इसे .... द्वारा दिखाते है।

(ञ) यदि A तथा B दो समुच्चय हों तो AxB...................को प्रदर्शित करता है।

(3) यदि $A = \{1,3,5,6\}$ तथा $B = \{2,3,4,5,6\}$ तो निम्न समुच्चयों को प्राप्त कीजिए।

(क) $\{(a, b) : a = b\}$

(ख) $\{(a, b): a < b\}$

(ग) $\{(a, b): a > b\}$

(घ) $\{(a, b): a2 = b\}$

4. यदि $A = \{1,3,5,6,7,8,9\}, B = \{2,4,6,8,10\}$ तो ज्ञात करिए तथा वेन आरेख निर्मित करें।

क. $A \, U \, B$

ख. $A \cap B$

ग. $A - B$

1.7 सारांश

इस इकाई के अध्ययन के बाद यह स्पष्ट हो जाता है कि किसी भी वास्तविक स्थिति के परिमाण को वास्तविक अंक प्रणाली द्वारा व्यक्त किया जाता है। सभी प्राकृतिक संख्याएँ, पूर्णांक, परिमेय व अपरिमेय संख्याएँ वास्तविक अंक प्रणाली के अंग है। समुच्चय सिद्धान्त तथा समुच्चयों के बीच सम्बन्ध को समझने में वास्तविक अंक प्रणाली का महत्वपूर्ण योगदान है। समुच्चय की परिभाषा से हम यह समझ सके है कि किसी विशिष्ट सुपरिभाषित आधारों पर अनेक वस्तुओं को एक समूह में रखा जा सकता है तथा सुपरिभाषित आधार में परिवर्तन करके उपसमुच्चयों का निर्माण किया जा सकता है। इसके अतिरिक्त विभिन्न प्रकार के समुच्चयों जैसे घात समुच्चय, विसंघीत समुच्चय, पूरक समुच्चय आदि से परिचित हुए है, समुच्चयों के बीच अनेक संक्रियाएँ जैसे संघ, प्रतिच्छेद, अंतर आदि से भी हम परिचित हुए है।

1.7 शब्दावली

अंक प्रणालीः– गणना के लिए विकसित शास्त्र– गणित का मूल आधार अंक प्रणाली है; जिस के द्वारा अंको का क्रम व मान निर्धारित होता है।

अवयवः– समुच्चय के सदस्यों को अवयव कहते है।

परिमितः– जिसका दायरा निश्चित है तथा जिसकी गणना करना सम्भव है।

अपरिमितः– जिसका दायरा निर्धारित न हो तथा जिसकी गणना करना असम्भव हो।

1.8 अभ्यास प्रश्न के उत्तर

1. (क) $S = \{x : x \in I$ तथा $7 < x < 36\}$

(ख) $S = \{x : x \in Q$ तथा $3 < x < 85\}$

(ग) $S = \{x : x \in I$ तथा $x \in \bar{I}\}$ ।

(घ) $S = \{x : x$ कृषि में उत्पादन के लिए उपयोग की जाने वाली वस्तु है यथा खाद, भूमि, सिंचाई, बीज, श्रम, ऊर्जा/पशुबल, कीटनाशक/तकनीकि एवं उपकरण, अन्य उपयोगी रसायन।$\}$

(ड) $QxQ = \{(a, b) : a \in Q$ तथा $b \in Q\}$

2. (क) परिमेय (घ) वास्तविक (छ)घात समुच्चय

(ख) अद्वितीय (ड.) उभयनिष्ठ (ज) रिक्त समुच्चय

(ग) प्राकृतिक (च) उभयनिष्ठ (झ) रिक्त समुच्चय,

(ञ) कार्तीय गुणनफल

3.(क) $\{(3,3), (5,5), (6,6)\}$

(ख)$\{(1,2), (1,3), (1,4)(1,5)(1,6)(3,4), (3,5), (3,6)(5,6)\}$

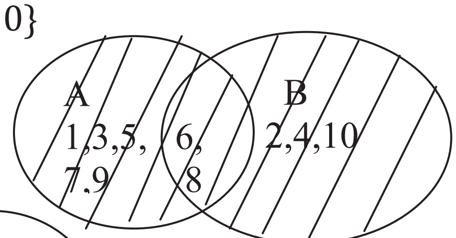
(ग) $(5,2)(5,3)(5,4)(6,2)(6,3)(6,4)(6,5)$

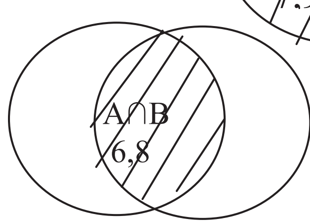
(घ) ϕ

4. (क) $A\ U\ B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

आच्छादित क्षेत्र AUB

को दर्शाता है।

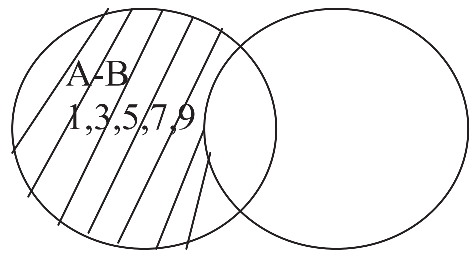




(ख) $A \cap B = \{6,8\}$

आच्छादित क्षेत्र $A \cap B$ को दर्शाता है।

(ग) $A - B = \{1,3,5,7,9\}$



आच्छादित क्षेत्र $A - B$ को दर्शाता है।

1.9 संदर्भ ग्रन्थः–

1. *Chiang, A.C.; Fundamental Methods of Mathematical Economics; Mc GRAW – HILL.*
2. महेश चन्द्र; मेहरोत्रा, प्रकाश नारायण; अर्थशास्त्रीय गणित; उत्तर प्रदेश हिन्दी ग्रंथ अकादमी, लखनऊ।

1.10 सहायक ग्रन्थः–

1. मिश्र, जे.पी., गणितीय अर्थशास्त्र, सहित्यभवन पब्लिकेशन।
2. *Agarwal, D.R.; Quantitative Methods: Mathematicsand Statistics, Vrinda Pub.*
3. अग्रवाल, डी.आर.; गणितीय अर्थशास्त्र, वृन्दा पब्लिकेशन्स।
4. मेहता, बी.सी. एवं मदनानी, जी.एम.के; अर्थशास्त्र में प्रारम्भिक गणित; लक्ष्मीनारायण अग्रवाल पब्लिकेशन्स।
5. ***Mehta, B.C. and Madnani G.M.K; Mathematics forEconomists Kitab Mahal Publication.***

1.11 निबन्धात्मक प्रश्नः

(1) वास्तविक संख्याओं की अवधारणा को स्पष्ट कीजिए।

(2) पूर्णांक को उदाहरण दे कर समझाइये।

(3) निम्न को परिभाषित कीजिएः–

क. समष्टीय समुच्चय   ख. उप समुच्चय

ग. पूरक समुच्चय   घ. विसंघीत समुच्चय

(4) सम्बन्ध से आप क्या समतझते हैं उदाहरण की सहायता से सम्बन्ध और फलनात्मक सम्बन्ध में भेद कीजिए।

इकाई 2 :–फलन एवं उनके आर्थिक अनुप्रयोग

इकाई संरचना

2.1 प्रस्तावना

दो परिवर्तनशील राशियों के बीच क्रियाशील कारण कार्य अथवा कारक–परिणाम सम्बन्ध की सम्पूर्ण (दिशा एवं परिमाणात्मक स्वरूप दोनों ही पक्षों को समाविष्ट करते हुए) व्याख्या करने में गणित की फलन एवं फलनात्मक सम्बन्ध की अवधारणा अत्यंत उपयोगी सिद्ध हुई है। प्रायः एक ही कार्य का सम्पादन अनेक कारकों का समवेत प्रभाव होता है। मनुष्य एवं समाज के जीवन के सभी नहीं तो अधिकांश विषय या बातें विशेषकर आर्थिक विषय या बातें सतत् परिवर्तनशीलता का परिचय देते आए हैं। आर्थिक जीवन से जुडे अनेक ऐसे विषय है जिनकी परिमाणात्मक माप सम्भव होती है और जो परिवर्तनशील होती हैं, इनको आर्थिक चर के रूप में देखा जाता है। यह आर्थिक सरल/जटिल, चर/कारक परिणाम सम्बन्धों की अनेक श्रृंखलाएँ उत्पन्न कर फलनात्मक सम्बन्धों का एक मकडजाल तैयार कर देते है। अर्थशास्त्र आर्थिक चरों के बीच क्रियाशील कारक परिणाम सम्बन्धों से बुने मकडजाल के मनुष्य की निर्णय प्रक्रिया एवं आर्थिक व्यवहार पर पडने वाले समवेत प्रभावों की जटिलता को सरल बना कर एक–एक करके समझने व इस समझ के आधार पर भविष्य में उत्पन्न होने वाली आर्थिक चुनौतियों के प्रति मनुष्य एवं समाज को सचेत करने तथा वर्तमान और भविष्य की आर्थिक चुनौतियों के कल्याणकारी समाधान ढूंढने के चनौतीपूर्ण दायित्व को स्वीकार करता है। अर्थशास्त्र द्वारा इस चुनौतीपूर्ण दायित्व के सफलतापूर्ण निर्वहन में गणित के फलन एवं फलनात्मक सम्बन्ध का एक उपकरण के रूप में महती योगदान रहा है।

2.2 उद्देश्य

फलन एवं फलनात्मक सम्बन्ध से आपको सुपरिचित कराने के पीछे निम्न उद्देश्य है।

क) विभिन्न आर्थिक विषयों यथा मांग, पूर्ति, मूल्य, आय, उत्पादन इत्यादि की परिवर्तनशील प्रकृति के परिमाणात्मक स्वरूप को आप आसानी से समझ सकें।

ख) विभिन्न आर्थिक चरों के बीच क्रियाशील कारक–परिणाम सम्बन्धों को भली प्रकार समझकर इन सम्बन्धों के आधार पर प्रतिपादित आर्थिक सिद्धान्तो को आत्मसात कर सके तथा आर्थिक फलनात्मक सम्बन्धों पर आधारित आर्थिक संदर्शो की कार्य प्रणाली की गूढताओं को सहजता से समझ सकें।

2.3 चर

चर संस्कृत भाषा का शब्द है। चर से आशय उस वस्तु से है जो चरायमान अथवा परिवर्तनशील होती है। गणित में ऐसे अनेक उदाहरण हैं जिनके मान या परिमाण परिवर्तनशील हो सकते हैं, जैसेः– पूर्णांक का मान –578,–189,–5, 0, 23, 94........................ .आदि कुछ भी हो सकता है। इसी प्रकार व्यवहारिक जीवन में भी चर के अनेक उदाहरण मिलते है जैसेः– जानवर–चूहा, बिल्ली, हाथी आदि कुछ भी हो सकता है। इस प्रकार 'चर वह वस्तु है जिसका मान या परिमाण परिवर्तनशील हो सकता है'। अर्थात्, चर वह है जो विभिन्न मानों को धारण कर सकता है। वस्तुतः चर के माध्यम से एक पूरे समूह अथवा समुच्चय को इंगित किया जाता है। अपने इसी गुण के कारण अर्थशास्त्र में इसकी उपयोगिता बन जाती है। उदाहरण के लिए मूल्य, लाभ, आगम, उपयोगिता, उपभोग स्तर, राष्ट्रीय आय, निवेश, आयात निर्यात आदि सभी संदर्भ एवं समय के साथ भिन्न–भिन्न मान धारण करते हैं। चूँकि प्रत्येक चर विभिन्न मान धारण कर सकता है इसलिए चर को संख्या के स्थान पर 'प्रतीक' द्वारा व्यक्त किया जाता है, यथा मूल्य को P, लाभ को π, आगम को R, लागत को C, उपयोगिता को U, उपभोग स्तर को C, राष्ट्रीय आय को Y, निवेश को I, आयात को M, निर्यात को X, आदि से दर्शाया जाता है। हालांकि, जब हम $P = 7$, $C = 35$ या $Y = 100$ लिखते हैं तो वस्तुतः हम एक विशेष स्थिति में इन चरों के निर्धारित विशिष्ट मानों का (उपयुक्त रूप से चयनित इकाइयों में) उल्लेख कर रहे होते है।

2.3.1 अन्तः चर :– वे चर जिनका मान गणितीय संदर्श की अन्तः शक्तियों द्वारा निर्धारित होता है अर्थात जिन चरों के मानों या परिमाणों का निर्धारण संदर्श के भीतर होता है उन्हें अन्तः चर कहते हैं। जैसे– बाजार मूल्य च का निर्धारण बाजार की आन्तरिक शक्तियों (माँग एवं पूर्ति) द्वारा होता है। अतः बाजार विश्लेषण में मूल्य एक अन्तः चर है। अर्थात् अन्तः चर वे चर हैं जिनका मान संदर्श को हल करने से प्राप्त होता है।

2.3.2 बाह्य चर :– वे चर जिनका निर्धारण संदर्श की आन्तरिक शक्तियों द्वारा नहीं होता अपितु प्रायः जिनका उपयोग करके संदर्श को हल किया जाता है और अन्तः चर का निर्धारण होता है। उदाहरणार्थ– एक उपभोक्ता के लिए बाजार मूल्य एक बाह्य चर है क्यूँकि एक अकेला उपभोक्ता बाजार मूल्य को परिवर्तित नहीं करा सकता। अर्थात

उपभोक्ता व्यवहार में उपभोग स्तर निर्धारण की दृष्टि से बाजार मूल्य दिया हुआ होता है तथा उपभोग स्तर इस दिए हुए बाजार मूल्य द्वारा निर्धारित होता है। इस प्रकार यह भी स्पष्ट हो जाता है कि एक चर जो एक संदर्भ के लिए अंतः चर है दूसरे संदर्भ के लिए बाह्य चर हो सकता है अर्थात् संदर्भ बदलने पर चर की भूमिका भी बदल सकती है।

2.4 अचर

चर के विपरीत अचर वह राशियाँ होती हैं जिनके परिमाण अथवा मान में परिस्थिति अथवा संदर्भ बदलने पर भी परिवर्तन नहीं होता है। जैसेः– गुरूत्वाकर्षण नियंताक $g = 9.8$ मी0/से^{2}, $\pi = 3.14$, इत्यादि।

अर्थशास्त्र में भी अचर राशि के उदाहरण मिलते है, जैसे– स्थिर लागत, स्वायत्त उपभोग, स्वायत्त निवेश आदि।

2.4.1 गुणांक :– प्रायः चर स्थिरांकों अथवा अचरों के साथ संयुक्त रूप से प्रयोग किए जाते हैं जैसे– 0-7 Y, 5P आदि। ऐसी अचर राशियों को गुणांक कहा जाता है। किन्तु अलग–अलग स्थितियों में गुणांक ो के मान अलग–अलग हो सकते है अतः इन गुणांक ों को व्यापकता देने के लिए निश्चित संख्याओं के स्थान पर a, b, α, β, आदि प्रतीकों से दर्शाया जाता है। उदाहरणार्थ 5 P के स्थान पर $\dot{P}$ या 0-7 Y के स्थान पर cY लिखा जाता है। ये प्रतीक इस अर्थ में अनोखे होते हैं कि ये एक अचर राशि का प्रतिनिधित्व करते है तथापि इनके लिए कोई सर्वथा निश्चित मान प्रदान नहीं किया गया है। यह एक ऐसे अचर या स्थिरांक है जो चर होते हैं। इनके इस विशिष्ट गुण को स्पष्ट पहचान देने के लिए इन्हे 'परिमापक स्थिरांक' अथवा मात्र 'परिमापक' कहते है।

2.5 सम्बन्ध

चर विश्लेषण के अर्न्तगत हम सम्बन्धों का अध्ययन करते हैं। यहाँ यह स्पष्ट करना आवश्यक है कि चर विश्लेषण के अन्तर्गत किसी एक चर के मान में होने वाले परिवर्तनों का अध्ययन नहीं किया जाता वरन दो या दो से अधिक चरों के बीच के सम्बन्धों का अध्ययन किया जाता है। जैसे– $Y = 2X$, $Y = X^2$,

$Y = \pm\sqrt{X}$ इत्यादि। गणितीय सम्बन्ध दो प्रकार के होते हैं–

(i) गैर–फलनात्मक **(ii)फलनात्मक**

2.5.1 गैर–फलनात्मकः– चरों के बीच के ऐसे सम्बन्ध जिनसे अद्वितीय परिणाम मिलना सुनिश्चित न हो तथा जिसके फलस्वरूप चरों के बीच कारण–कार्य सम्बन्ध स्थापित करना सम्भव न हो जैसेः– $Y = +\sqrt{X}$; X का मान -4 होने पर Y का मान 2 भी हो सकता है तथा –2 भी हो सकता है अर्थात् परिणाम (Y) अद्वितीय नहीं है। इसी प्रकार लॉटरी का टिकट खरीदने पर ईनाम मिल भी सकता है और नहीं भी मिल सकता है अर्थात परिणाम अद्वितीय नहीं है।

2.5.2 फलनात्मक सम्बन्धः– चरों के मध्य ऐसा सम्बन्ध जिसमें एक चर या एक से अधिक चरों के मान द्वारा किसी दिए हुए चर के मान का अद्वितीय निर्धारण होता हो उसे फलनात्मक सम्बन्ध कहते हैं। फलनात्मक सम्बन्धों में एक सुस्पष्ट कारण–कार्य सम्बन्ध निहित होता है। जैसे $Y = 2x$ इसी प्रकार यह कथन कि कोई व्यक्ति अपने खेत पर जितनी अच्छी किस्म के बीज का प्रयोग करेगा (सिंचाई, खाद एवं खेती की देखभाल आदि समान रहने पर) प्रति एकड़ फसल का उत्पादन उतना ही अच्छा होगा।

उपरोक्त उदाहरणों में Y का मान X पर निर्भर कर रहा है तथा उत्पादन की मात्रा बीज की किस्मों पर निर्भर कर रही है, अर्थात Y और फसल के उत्पादन का मान क्रमशः X के मान तथा बीज की किस्म पर आश्रित हैं। किसी फलनात्मक सम्बन्ध में वे चर जिनका परिमाण अथवा मान किसी अन्य चर अथवा चरों के मानों पर निर्भर करता है उनको आश्रित चर कहते हैं। आश्रित चरों के मान का निर्धारण फलनात्मक सम्बन्ध को हल करने के परिणामस्वरूप होता है। इसी कारण इन्हे फलन भी कहते है। एक फलनात्मक सम्बन्ध में आश्रित चर उस फलनात्मक सम्बन्ध का अन्तः चर होता है। इसके विपरीत फलनात्मक सम्बन्ध में प्रयोग होने वाले वे चर जिनके परिमाण अथवा मान का निर्धारण फलनात्मक सम्बन्धों की सीमाओं के बाहर होता है या दूसरे शब्दों में जो अपना मान या परिमाण स्वतन्त्र रूप से धारण करते हैं उन्हें स्वतन्त्र चर कहते हैं। किसी फलनात्मक सम्बन्ध में प्रयोग होने वाले स्वतन्त्र चर उस फलनात्मक सम्बन्ध के लिए बाह्य चर होते हैं। चहाँ यह ध्यान देने की बात है कि एक फलनात्मक सम्बन्ध के सन्दर्भ में जो चर 'स्वतन्त्र चर' होता है दूसरे फलनात्मक सम्बन्ध के सन्दर्भ में आश्रित चर हो सकता है।

एक फलनात्मक सम्बन्ध में स्वतन्त्र चरों की संख्या एक से अधिक हो सकती है किन्तु आश्रित चर एक ही होता है।

फलनात्मक सम्बन्ध को सांकेतिक रूप में निम्नवत दर्शाया जाता हैः–

$Y = f(X)$ जहाँ Y= फलन या आश्रित चर

X = स्वतन्त्र चर तथा f फलनात्मक सम्बन्ध को दर्शाता है। जिसे 'Y(चर), X(चर) का फलन है' पढ़ते हैं।

यदि स्वतन्त्र चरों की संख्या n हो तो फलनात्मक सम्बन्ध को निम्नवत लिखते हैं–

$$Y = f(x_1, x_2, \text{- - - - - - - - - - - - -} x_n)$$

यह सम्भव है कि स्वतन्त्र चर के एक से अधिक मानों के लिए आश्रित चर का एक ही मान प्राप्त हो; महत्वपूर्ण यह है कि फलनात्मक सम्बन्ध मे स्वतन्त्र चर के प्रत्येक मान के लिए आश्रित चर का एक अद्वितीय मान होता है। किन्तु यह आवश्यक नहीं है कि इसका व्युत्क्रम भी सत्य हो। जिन फलनात्मक सम्बन्धों का व्युत्क्रम भी एक फलनात्मक सम्बन्ध होता है उन्हें व्युत्क्रम (inverse) फलन कहते हैं।

एक दिए हुए सन्दर्भ में स्वतन्त्र चर X के सभी धारणीय मानों के समुच्चय को डोमेन (Domain) कहते हैं। स्वतन्त्र चर X के प्रत्येक मान के लिए Y का एक अद्वितीय मान होता है, Y के इस मान को X के मान का बिंब कहते हैं। यह बिंब जिस समुच्चय के अवयव होते है उस समुच्चय को परिसर कहते है। परिसर में कुछ ऐसे अवयव हो सकते है जो डोमेन के किसी भी अवयव का बिंब न हो।

हमारे दैनंदिन जीवन में घटित होने वाले आर्थिक व्यवहार के समीकरण सामान्यतया फलनात्मक सम्बन्ध होते हैं जिन्हें आधार बनाकर आर्थिक संदर्शों का निर्माण तथा आर्थिक सिद्धान्तों का प्रतिपादन किया जाता है। चूँकि अधिकांश आर्थिक चर स्वभावतः गैर ऋणात्मक वास्तविक अंकों की सीमा से बंधे होते हैं फलतः अधिकांश आर्थिक संदर्शो या फलनात्मक सम्बन्धों के डोमेन भी इस सीमा से बंधित होते हैं।

2.5.3 फलनों के प्रकार :– प्रत्येक फलन में अन्तर्निहित फलनात्मक सम्बन्ध की व्याख्या उस सम्बन्ध को व्यक्त करने वाली गणितीय प्रक्रिया पर आधारित एक निश्चित समीकरण के द्वारा की जाती है। उदाहरणार्थ–

(i) $Y = f(X) : Y = mX + c$

(ii) $Y = f(X) : Y = a_0 + a_1 X + a_2X^2 + \text{- - - - - - -} a_nX^n$

(iii) $Y = f(X) : Y = a \log X$ vkfnA

अतः फलनात्मक सम्बन्ध में अन्तर्निहित गणितीय संक्रिया के आधार पर फलनों को दो प्रमुख वर्गों में बाँटा जाता है।

1) बीजीय फलन 2) अबीजीय फलन

2.5.3.1 बीजीय फलन :– जिन फलनों में स्वतन्त्र चर व आश्रित चर के मध्य फलनात्मक सम्बन्ध को बीजगणितीय संक्रियाओं के द्वारा पूर्णतः व्यक्त किया जा सकता है ऐसे फलन बीजीय फलन होते है।

उदाहरण के लिए $Y = f(X) : Y = a_0 + a_1 X + a_2X^2 + \text{- - - - - - -} a_nX^n$

बीजीय फलनों को पुनः उपवर्गों में निम्न प्रकार वर्गीकृत किया जाता है।

2.5.3.1.1 अचर फलनः ऐसे फलन जिनमें स्वतन्त्र चर के सभी मानों के लिए आश्रित चर या फलन का एक निश्चित मान होता है उन्हें अचर फलन कहते हैं।

उदाहरणार्थः– $Y = f(X) : Y = 10$ (X के सभी मानों के लिए) अर्थात X के मान परिवर्तित होने के पश्चात् भी Y का मान 10 स्थिर बना रहता है। दूसरे शब्दों में अचर फलनों के ग्रफीय निरूपण से अक्ष के समानान्तर एक सरल रेखा प्राप्त होती है।

राष्ट्रीय आय के संदर्श में जब विनियोग बाह्य रूप से दिया होता है तो विनियोग फलन $I = I_0$ या $I =$ j 2 लाख करोड़ हो सकता है। जो अचर फलन का एक उदाहरण है। इसी प्रकार स्थिर लागत $FC = f(q)$; $FC =$ j 100 करोड अचर फलन का उदाहरण है।

2.5.3.1.2 रैखिक फलन :– रैखिक फलन एक घातीय फलन होते है जिनके किसी भी पद का अधिकतम घातांक एक होता। रैखिक फलनों के प्रत्येक बिन्दु पर फलन की प्रवणता समान रहती है। रैखिक फलनों में स्वतन्त्र चर और आश्रित चर में होने वाले परिवर्तनों का अनुपात स्थिर बना रहता है अर्थात फलन में परिवर्तन की दर स्थिर रहती है। रैखिक फलन के ग्राफीय निरूपण से सरल रेखा प्राप्त होती है।

2.5.3.1.3 द्विघातीय फलन :– द्विघातीय फलन द्वितीय घात के फलन होते है जिनके किसी भी पद का अधिकतम घातांक 2 होता। द्विघातीय फलनों में परिवर्तन की दर परिवर्तनशील होती है, ऐसे फलनों के ग्राफीय निरूपण से शांकव आकृतियाँ (Conic Section)प्राप्त होती है। जैसे – परवलय, वृत्त, दीर्घ वृत्त, अति परवलय।

2.5.3.1.4 बहुपद फलन :– जैसा कि इसके नाम से स्पष्ट है ऐसे फलनों में अनेक पद होते हैं इसका प्रत्येक पद एक गुणांक के साथ स्वतन्त्र चर का एक ऐसा पद होता है जिसका घातांक गैर ऋणात्मक पूर्णांक हो। जैसेः–

$$Y = f(X) : Y = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \text{- - - - - -} + a_nX^n$$

हम जानते हैं कि $X^0 = 1$ एवं $X^1 = X$ होता है, उपरोक्त बहुपद में इन तत्वों को समावेशित कर के यह कहा जा सकता है कि

जब $n = 0$ तो $Y = a_0$ - - - - - एक अचर फलन होता है।

जब $n = 1$ तो $Y = a_0 + a_1X$ - . . . . . एक रैखिक फलन होता है।

जब $n = 2$ तो $Y = a_0 + a_1X + a_2X^2$ . . . . . .एक द्विघातीय फलन होता है।

इसी प्रकार n का मान बढते जाने पर बढते घातांको के जटिल फलन प्राप्त होते हैं।

2.5.3.2 अबीजीय फलनः– ऐसे फलन जिनको मात्र बीजीय संक्रियाओं द्वारा व्यक्त करना सम्भव न हो तथा जिनको व्यक्त करने के लिए चर–घातांकीय, लघुगणिकीय या त्रिकोणमितीय संक्रियाओं का सहारा लेना पड़ता है, अबीजीय फलन होते हैं।

2.5.3.2.1 चर–घातांकीय फलनः– वे फलन जिनकी व्याख्या ऐसे पदों की सहायता से की जाती है जिनमें घातांक में स्वतन्त्र चर की भूमिका होती है चर – घातांकीय फलन कहलाते है। उदाहरणार्थ–

$Y = f(X) : Y = a^x$

$Y = f(t) : Y = ab^t$

2.5.3.2.2 लघुगुणकीय फलनः– वे फलन जिनको व्यक्त करने के लिए स्वतन्त्र चर के लघुगुणकों का प्रयोग किया जाता है अर्थात जिन फलनों में फलनात्मक सम्बन्ध लघुगुणकीय संक्रीयाओं द्वारा व्याख्यायित होते है उन्हें लघुगुणकीय फलन कहते हैं। उदाहरणार्थ– $Y = f(X) : Y = a \log_b X$

या, $Y = f(X) : Y = \alpha \log_e X$

2.5.3.2.3 त्रिकोणमितीय फलन :– वे फलन जिनको व्यक्त करने के लिए त्रिकोणमितीय संक्रियाओं का प्रयोग किया जाता है त्रिकोणमितीय फलन कहलाते हैं। उदाहराणार्थ–

$Y = f(x) : Y = a \sin x$

या, $Y = f(x) : Y = x \sin \theta$

2.5.3.3 परिमेय फलनः– वे फलन जिनको दो बहुपदों के अनुपात के द्वारा व्यक्त किया जाता है, उन्हें परिमेय फलन कहते हैं।

जैसेः– $Y = f(X): Y = \dfrac{a_0 + a_1X}{b_0 + b_1X + b_2X^2}$ या

$Y = f(X): Y = \dfrac{1 - X}{1 + X + X^2}$

इसी प्रकार $Y = {}^{a}\!/\!_{X}$ एक विशेष परिमेय फलन है जिसका अर्थशास्त्र में अनेक संदर्भो में प्रयोग होता है। इस फलन को भिन्न प्रकार से $X.Y = \dot{}$ (एक अचर राशि) लिखा जा सकता है। जिसके ग्राफीय निरूपण से अति परवलय प्राप्त होता है जो X तथा Y अक्ष पर अनन्त स्पर्शी होता है।

माँग विश्लेषण में माँग फलन च्फ त्र ज्ञय औसत स्थिर लागत फलन (AFC) $= {}^{FC}{}_{Q}$ तथ्रा उपभोक्ता व्यवहार में उपयोगिता फलन $U_0 = XY$ जहाँ U_0 उपयोगिता का एक निश्चित स्तर है अर्थात् इससे एक निश्चित तटस्थता वक्र प्राप्त होगाद्ध इत्यादि इसके उदाहरण हैं।

2.5.3.4 अपरिमेय फलनः– ऐसे बीजीय फलन जिनको बहुपद के मूल जैसे वर्गमूल के द्वारा व्यक्त किया जाता है, को अपरिमेय फलन कहते है।

उदाहरणार्थ– $Y = f(x) : Y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$

2.5.3.5 अन्य आधारों पर फलनों का वर्गीकरणः–

2.5.3.5.1 स्पष्ट एवं अस्पष्ट फलन :– स्वतन्त्र चर के पदों में फलन को व्यक्त करने की स्पष्टता के आधार पर फलनों को दो वर्गों में बाँटा जाता है।

क) स्पष्ट फलनः– स्पष्ट फलन वे फलन होते है जिनमें फलन या आश्रित चर को स्वतन्त्र चर के पदों में स्पष्ट रूप से व्यक्त किया जा सकता है। अर्थात ऐसे फलन जिनमें स्वतन्त्र व आश्रित चरों की स्पष्ट पहचान सम्भव होती है। उदाहरणार्थ–

1. $Y = f(X) : Y = a + bX$
2. $Y = f(X) : Y = a_0 + a_1X + a_2X^2 + - - - - - - - - a_nX^n$
3. $Y : f(X) : y = a \log X$ आदि।

ख) अस्पष्ट या निहित फलनः– अस्पष्ट फलन वे फलन होते है जिनको स्वतन्त्र चर के पदों में पूर्ण स्पष्टता के साथ व्यक्त नहीं किया जा सकता है। अर्थात ऐसे फलन जिनमें स्वतन्त्र व आश्रित चरों की स्पष्ट पहचान कर पाना सम्भव नहीं होता है। उदाहरणार्थ–

$$Y = f(X) : aX^2 + 2hXY + bY^2 = 0$$

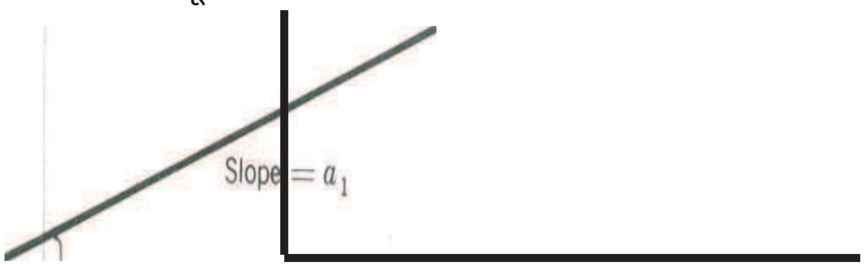
2.5.3.5.1.1 दो और दो से अधिक स्वतन्त्र चरों वाले फलनः–

जैसा कि फलन की अवधारणा का अध्ययन करते हुए हमने जाना था कि फलन में स्वतन्त्र चरों की संख्या एक से अधिक भी हो सकती है, ऐसा तब होता है जब किसी फलन का मान एक से अधिक (कारको) स्वतन्त्र चरों द्वारा निर्धारित होता है, उदाहरण के लिए, यदि किसी चर मान दो स्वतन्त्र चरों X था Y पर आश्रित हो ता दो स्वतन्त्र चरों का फलन होगा इसे सांकेतिक रूप से $= f(X,Y)$ द्वारा दिखाया जाता है, इसी प्रकार यदि कोई चर Y,n स्वतन्त्र चरों (कारकों) – $X_1, X_2, - - - - X_n$ पर आश्रित हो तो Y,n स्वतन्त्र चरों का फलन होगा जिसे $Y = f(X_1,X_2, - - - X_n)$ लिखा जाता है।

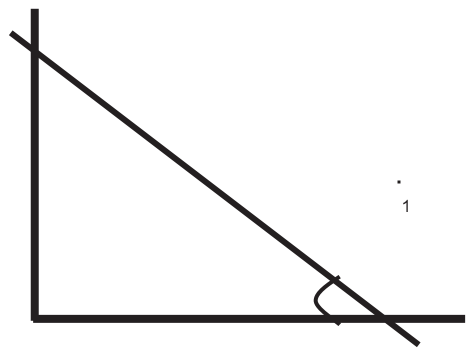
अर्थशास्त्र में ऐसे फलनों का बहुधा उपयोग किया जाता है, उदाहरण के लिए उपभोक्ता व्यवहार के सिद्धान्त में उपभोक्ता का उपयोगिता फलन U दो वस्तुओं X तथा Y के उपभोग स्तर पर निर्भर करता है जिसे $U = f(X, Y)$ लिखते हैं।

इसी प्रकार, उत्पादन सिद्धान्त में उत्पादन फ अनेक आगतों जैसे नाम (L), पूँजी (K), भूमि (N), साहस (E), तकनीकि (T) आदि पर निर्भर करता है जिसे $Q = f(L,K,N,E,T....)$ द्वारा दर्शाया जाता है। किन्तु विश्लेषण की सुविधा के लिए अन्य कारकों को अपरिवर्तनीय मान कर उत्पादन को मूलतः पूँजी और श्रम का फलन माना जाता है जिसे $Q = f(L, K)$ द्वारा दर्शाया जाता है।

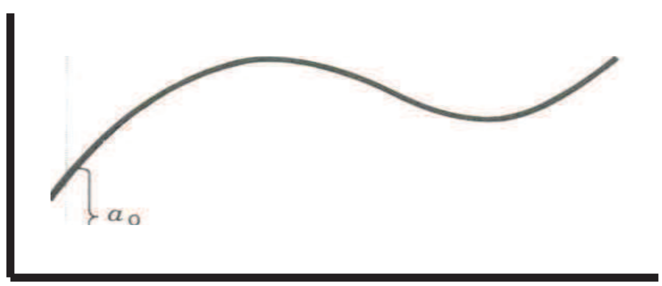
2.5.3.512 महत्वपूर्ण फलनों के ग्राफः–



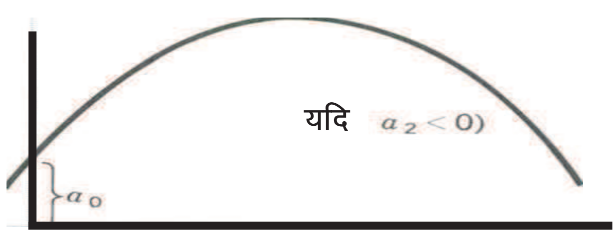
चित्र संख्या 1– रैखिक फलन $Y=a_0 + a_1X$



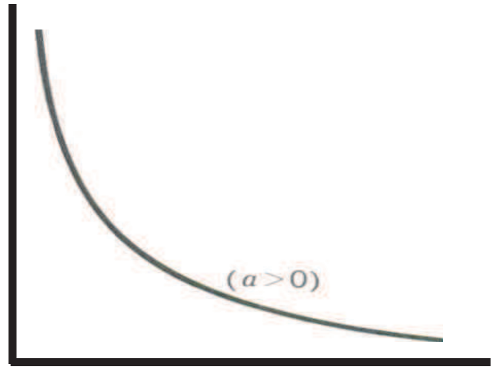
चित्र संख्या 2– ऋणात्मक ढाल का रैखीय फलन $Y = a_0 - a_1X$



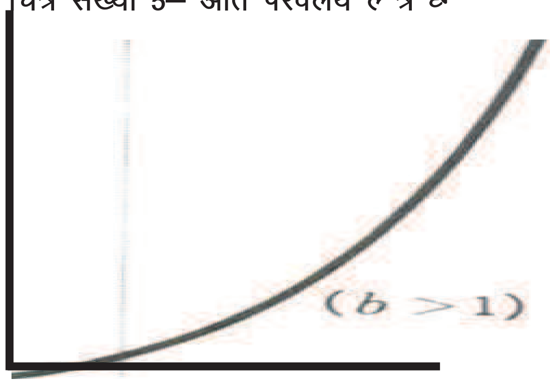
चित्र संख्या 3– द्वितीय घात के फलन $Y = a_0 + a_1X + a_2X^2$



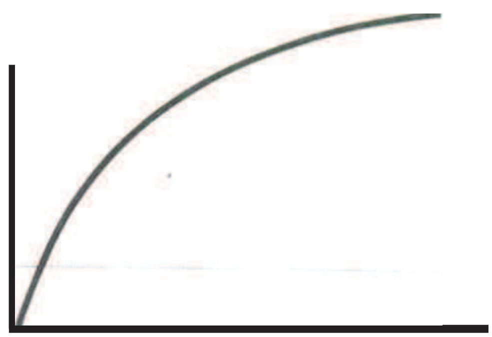
चित्र संख्या 4– तृतीय घात का फलन $Y = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$



चित्र संख्या 5– अति परवलय ल त्र ंध्र



चित्र संख्या – 6 चर घातांकीय फलन $Y = b^X$



चित्र संख्या 7– लघुगुणकीय फलन $Y = \log X$

2.5.3.5.2 फलन के मान में परिवर्तन की दिशा की सुनिश्चितता के आधार पर :–

क) एकदिष्ट फलनः– वे फलन जिनके मान या परिमाण में परिवर्तन की दिशा सुनिश्चित होती है अर्थात यदि फलन का मान बढ़ रहा होता है तो बढ़ता ही जाता है और यदि घट रहा होता है तो घटता ही जाता है। दूसरे शब्दों में, फलन के मान में परिवर्तन की दिशा

बदलती नहीं है; ऐसे फलनों को एक दिष्ट फलन कहते हैं। जैसेः– $Y = a + bX$; $Y = a - bX$; $Y = a^x$; आदि, जहाँ ˙,b > o

एकदिष्ट फलनों को पुनः दो वर्ग में वर्गीकृत किया जाता हैः–

(i) एकदिष्ट वर्धमान फलनः वे फलन जिनके मान या परिमाण निरन्तर बढते जाते हैं, एकदिष्ट वर्धमान फलन कहलाते हैं। जैसेः– $Y = a + bX$ तथा $Y = a^x$ आदि।

देखें चित्रः– 1

(ii) एकदिष्ट ह्रासमानः– वे फलन जिनके मान या परिमाण निरन्तर घटते जाते हैं, एकदिष्ट ह्रासमान फलन कहलाते हैं। जैसे $Y = a - bX$, तथा $Y = a^{-x}$ A

देखें चित्र 2।

ख) अदिष्ट फलनः– वे फलन जिनके मान या परिमाण में परिवर्तन की दिशा सुनिश्चित नहीं होती है, अदिष्ट फलन कहलाते हैं। अर्थात् अदिष्ट फलनों के मान बढने के बाद घटने लग सकते है अथवा घटने के बाद बढने लग सकते हैं अथवा क्रमशः कभी घटते कभी बढते हो सकते हैं। देखें चित्र–4।

जैसेः– $Y = ax^2 + bx + c$ एक परवलयाकार फलन का समीकरण है जिसके मान में परिवर्तन की दिशा एक सीमा के बाद बदल जाती है।

इसी प्रकार, $Y = a \sin x$ जिसका मान –a से.˙ के बीच दोलन करता रहता है।

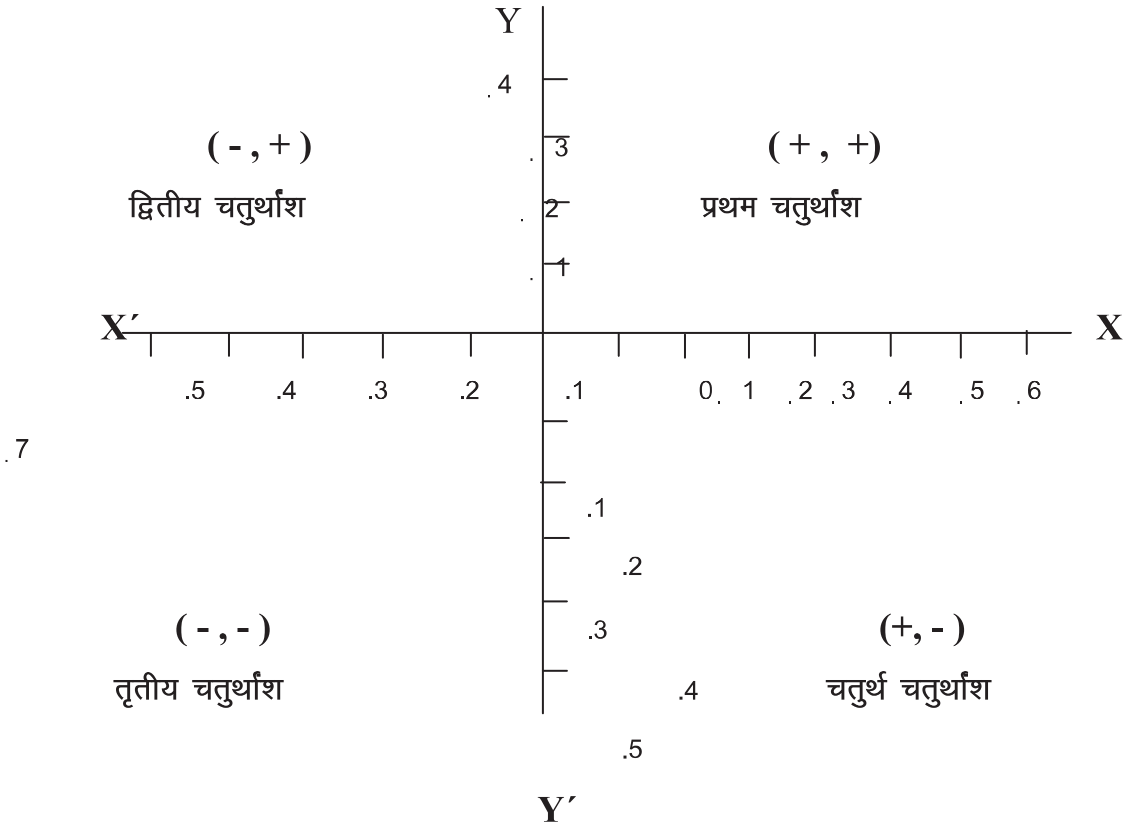
2.5.4 फलनों का रेखाचित्रीय निरूपणः– फलनों में अन्तर्निहित फलनात्मक सम्बन्धों को रेखाचित्र द्वारा सहजता से स्पष्ट किया जा सकता है। एक स्वतन्त्र चर वाले फलन का रेखचित्र आरम्भिक निर्देशांक ज्यामिति की सहायता से द्विआयामी–समतल या पृष्ठ पर अंकित किया जा सकता है किन्तु दो या दो से अधिक स्वतन्त्र चर वाले फलनों (जब सभी स्वतन्त्र चर एक साथ परिवर्तनशील हो) को अंकित करने के लिए तीन या तीन से अधिक आयामों की आवश्यकता पड़ती है जिसे पुस्तिका पर दर्शाना जटिल तथा तीन से अधिक आयामों का अंकन व्यवहारिक रूप से असम्भव होता है। यही कारण है कि बहु–स्वतन्त्र चरीय आर्थिक फलनों के विश्लेषण को रेखाचित्र द्वारा दर्शाने के लिए प्रायः एक चर को परिवर्तनशील रखते हुए शेष को स्थिर मान लिया जाता है।

उदाहरण के लिए – किसी वस्तु की X मांग (Dx) उस वस्तु के मूल्य P_x उपभोक्ताओं की आय (Y) उपभोक्ता की अभिरूचि (T) अन्य वस्तुओं के मूल्य (P_0) आदि पर निर्भर करती है। जिसे $D_x=f(P_x, P_0, Y,T.....)$ लिखा जाता है।

किन्तु विश्लेषण की सरलता और रेखाचित्र द्वारा सहजता से दर्शाने के लिए वस्तु के अपने मूल्य के अतिरिक्त शेष सभी स्वतन्त्र चरों को स्थिर मान कर $D_x=f(P_x)$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। जिसका रेखाचित्रीय निरूपण करने पर धनात्मक चतुर्थांश में बायें से दायें गिरती हुई रेखा या वक्र प्राप्त होता है। इसी प्रकार बहुघातीय बीजीय फलन, लघुगणकीय फलन, चर घातंकी फलन एवं त्रिकोणमितीय फलनों का रेखाचित्र हाथ से अंकित करना प्रायः असम्भव जैसा होता है।

उपरोक्त तथ्यों को ध्यान रखते हुये सरल निर्देशांक ज्यामिति को प्रयोग करते हुए आप लोगों के अभ्यास की दृष्टि से रैखिक एवं परवलयाकार फलनों के अंकन की विधि का उल्लेख किया जा रहा है।

एक स्वतन्त्र चरीय फलनों के अंकन के लिए द्विआयामी पृष्ठ को दो अक्षों ; X अक्ष जो क्षैतिज अक्ष तथा Y- अक्ष जो ऊर्ध्व अक्ष होता है, जो परस्पर 90^0 का कोण बनाते हुए एक–दूसरे को मूल बिन्दु 0 पर काटते है, और इस प्रकार द्वि–आयामी पृष्ठ को चार अक्षांशों में विभक्त करते है। स्वतन्त्र चर की गणना X अक्ष के सहारे तथा स्वतन्त्र आश्रित चर की गणना Y अक्ष के सहारे की जाती है। मूल बिन्दु से दायीं तरफ X के मान धनात्मक तथा मूल बिन्दु से बायीं तरफ X के मान ऋणात्मक होते है। इसी प्रकार Y के मान मूल बिन्दु से ऊपर धनात्मक तथा मूल बिन्दु से नीचे ऋणात्मक होते हैं। परिणामस्वरूप प्रथम चतुर्थांश में **X** तथा Y दोनों चरों के मान धनात्मक होते है इसे धनात्मक चतुर्थांश भी कहते है। द्वितीय चतुर्थांश **X** के मान ऋणात्मक तथा Y के मान धनात्मक होते है। तृतीय चतुर्थांश में **X** तथा Y दोनों के मान ऋणात्मक होते है इसे ऋणात्मक चतुर्थांश भी कहते है तथा चतुर्थ चतुर्थांश में **X** के मान धनात्मक तथा Y के मान ऋणात्मक होते हैं। देखें चित्र संख्या– 8



चित्र संख्या – 8

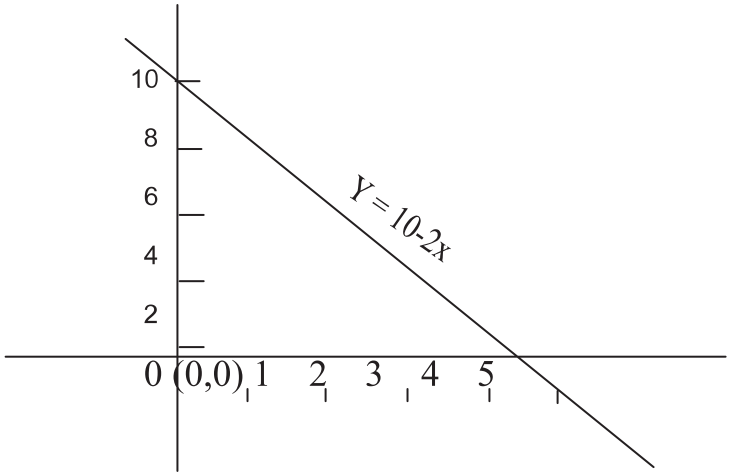
सामान्यतया फलन का हस्तनिर्मित आरेख बनाने के लिए स्वतन्त्र चर के पूर्णांक मानों को स्वेचछानुसार चुना जाता है तथा इन मानों को फलन के समीकरण में रखकर आश्रित चर या फलन के मान की ग्णना की जाती है। तत्पश्चात् समतल पर इन चर मानों के आधार पर निश्चित बिन्दुओं को चिन्हित किया जाता है इन बिन्दुओं को परस्पर मिलाने से फलन का आरेख प्राप्त हो जाता है।

फलनों का रेखाचित्रीय निरूपणः– उदाहरण द्वारा प्रस्तुति।

उदाहरण 1.:– $Y = 10-2X$ का रेखाचित्रीय निरूपण कीजिए।

हलः–

X	0	1	2	3	4	5
Y	10	8	6	4	2	0

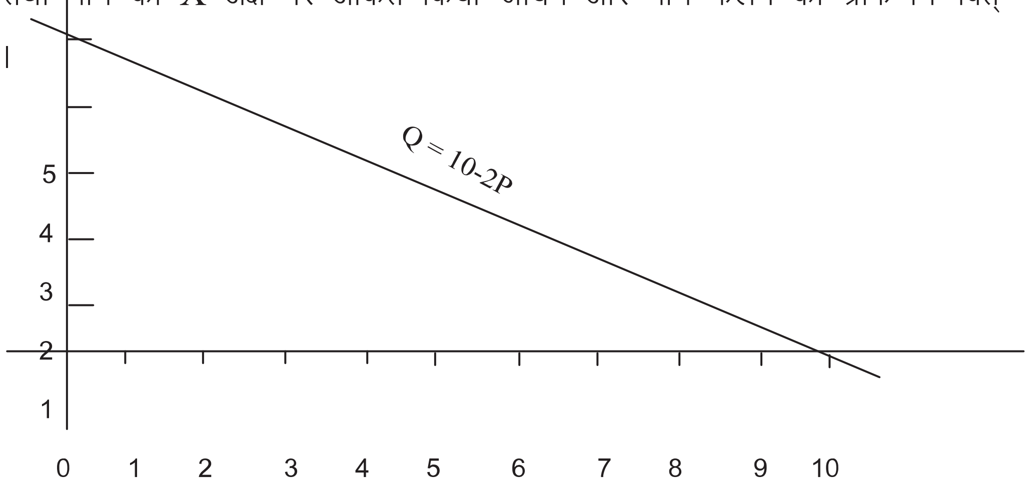


यद्यपि सारणी में X के शून्य से 5 तक के ही मान लिये ग्ये है परन्तु सभी वास्तविक संख्याएं इस फलन के डोमेन अर्थात X के मान हो सकते है।

चूँकि दिया गया फलन एक सरल रेखा को व्युत्पन्न करता है तथा सरल रेखा की ढाल अपरिवर्तित रहती है सारणी से प्राप्त पाँच बिन्दुओं को मिलाते हुए सरल रेखा को ग्राफ के पूरे विस्तार तक खींचा जाता है।

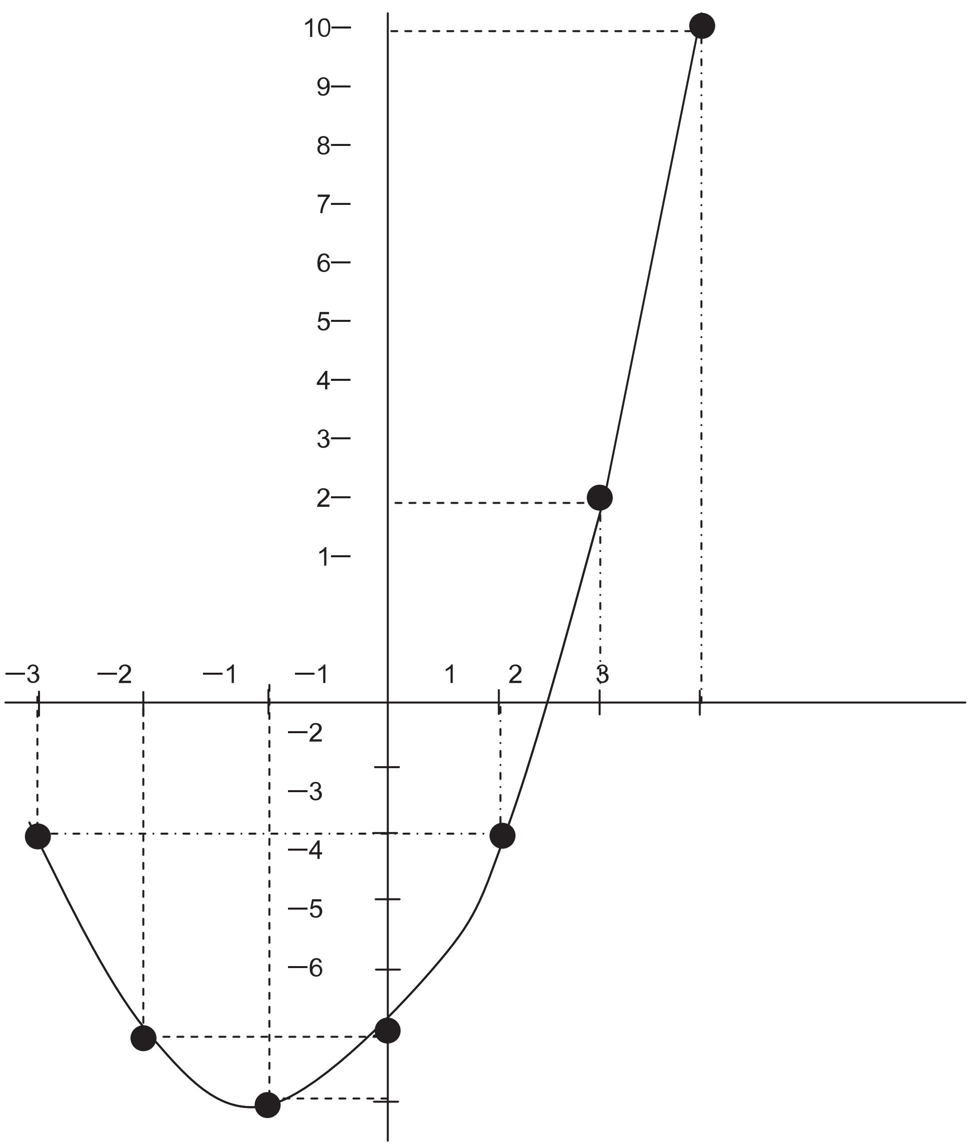
टिप्पणीः 1) यदि उपरोक्त फलन जैसा एक माँग फलन $Q = 10 - 2P$ हो तो P और Q के केवल XSj ऋण मान (शून्य अथवा धनात्मक मान) ही प्रासंगिक हों।

2) यद्यपि मूल्य स्वतन्त्र चर व माँग आश्रित चर है तथापि परम्परा के कारण मूल्य को Y अक्ष तथा माँग को X अक्ष पर अंकित किया जायेग और माँग फलन का ग्राफ निम्नवत् होगा।



उदाहरण 2 :– $Y= X^2+2X-5$ का रेखाचित्रीय निरूपण कीजिए।

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	-2	-5	-6	-5	-2	+3	10

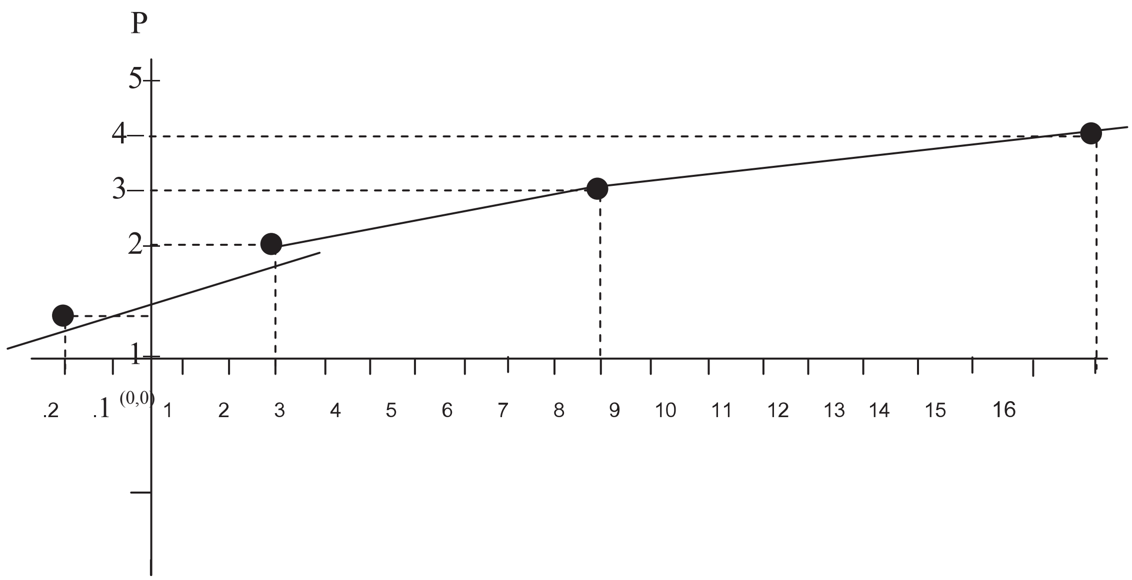


यद्यपि सारणी में X के .3 से .3 के बीच कुल 7 मान लिए गये है किन्तु X के सभी वास्तविक मान डोमेन के सदस्य होंगे। चूँकि दिया ग्या फलन एक परवलयाकार फलन है, इसका रेखाचित्रीय निरूपण करते समय इसके शीर्ष को चिह्नित कर उसका अंकन करना आवश्यक होता है सामान्यतया शीर्ष के बायीं तथा दायीं तरफ के दो या तीन बिन्दुओं को चिह्नित करना आवश्यक होता है, चूँकि परवलयाकार फलन की ढाल प्रत्येक बिन्दु पर परिवर्तित होती रहती है इसलिए अंकित किये गये बिन्दुओं को मुक्त–हस्त से मिलाया जाता है। इसी कारण परवलयाकार फलन का रेखाचित्र चिह्नित किये गये बिन्दुओं तक ही सीमित रहता है।

टिप्पणीः यदि उपरोक्त फलन जैसा एक पूर्ति फलन $Q= -5+2P+P^2$ का अंकन करना हो तो Q और P के केवल शून्य तथा धनात्मक मान ही प्रासंगिक होंगे अतः इसके अंकन के लिए तालिका निम्नवत बनेगी

P	1	2	3	4
Q	-2	3	10	19

तथा इसका ग्राफ निम्नवत बनेगा।



2.6 सारांश

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप गणितीय फलनों एवं फलनात्मक सम्बन्धों के विभिन्न पक्षों से सुपरिचित हो X, है। चर, अन्तः चर, वाह्य चर, अचर गुणांक आदि की अवधारणा से परिचित होने से अपको अर्थशास्त्र के अनेक तथ्यों को समझने में बहुत सुविधा होगी। फलनों के विभिन्न प्रकारों तथा फलनों के स्वरूप का निर्धारण करने में गणितीय संक्रियाओं की भूमिका के बारे में जो जानकारी इस इकाई में आप ने प्राप्त की है वह आर्थिक सिद्धान्तो व आर्थिक प्रणालीयों को समझने में सहायक सिद्ध होगी। फलनों के आर्थिक अनुप्रयोग सम्बन्धित जानकारी से आपको अर्थशास्त्र में फलनात्मक सम्बन्ध, चर व गुणांक आदि का आर्थिक विषयों में किस प्रकार प्रयोग किया जाता है, समझने में सहायता मिलेगी।

2.7 शब्दावली

प्रवणताः– फलन के किसी बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा की ढाल उस बिन्दु पर फलन की प्रवणता कही जाती है। फलन की प्रवणता आश्रित चर में परिवर्तन व स्वतन्त्र चर में परिवर्तन के अनुपात ($\Delta Y/\Delta X$) अथवा फलन में परिवर्तन की दर को दर्शाती है।

गुणांक :– गुणांक अर्थात् गुणा + अंक अर्थात् स्वतंत्र चर में इकाई परिवर्तन का फलन पर कितने गुणा असर पडेग, इस बात का निर्धारण करने वाला अंक।

शांकव आकृतिः– शंकु का विभिन्न प्रकार से अनुच्छेद करने से प्राप्त होने वाली आकृतियाँ।

2.8 अभ्यास प्रश्न

1. रिक्त स्थानों को भरिएः–

क. $Y = mX + C$ एक ....फलन है। (बीजीय/अबीजीय)

ख. रैखिक की फलन की प्रवणता ....रहती है। (बदलती/समान)

ग. .... फलन का रेखाचित्र अक्ष के समानान्तर होता है। (अचर/रैखिक)

घ. द्विघात फलनों में .... आकृतियों प्राप्त होती हैं।(शांकव/ चक्रीय)

ड. पूर्ण प्रतियोगिता में मूल्य .... चर होता है। (अन्तः/बाह्य)

च. फलन में स्वतन्त्र चरों की संख्या .... हो सकती है। (एक /अनेक)

छ. आश्रित चर को .... कहते है। (फलन/परिमापक)

ज.माँग, पूर्ति एवं लागत फलन .... चतुर्थांश में सीमित रहते हैं।(चतुर्थ/प्रथम)

झ. आवर्ती फलन ....का एक विशेष प्रकार होता है। (एकदिष्ट फलन/अदिष्ट फलन)

2. निम्न कथनो का परीक्षण कीजिएः—

क. फलनात्मक सम्बन्ध कारण—कार्य अथवा कारक—परिमाण सम्बन्ध को व्यक्त करता है। सत्य/असत्य

ख. $Y = a^X$ एक बीजीय फलन है। सत्य/असत्य

ग. $Y = a_0 + a_1X + a_2X^2$ एक अदिष्ट फलन है। सत्य/असत्य

घ. $Y = b - aX$ एकदिष्ट वर्धमान फलन है। सत्य/असत्य

ड0. सीमान्त आय फलन धनात्मक चतुर्थांश में सीमित रहता है। सत्य/असत्य

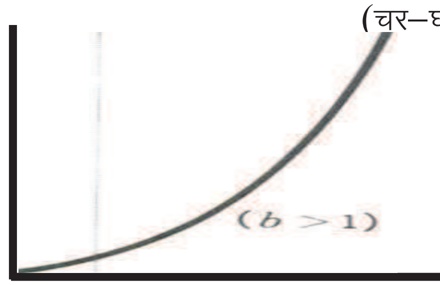
3. निम्न फलनों की पहचान कीजिएः—

क. $X^2 + Y^2 = a^2$ (स्पष्ट/अस्पष्ट)

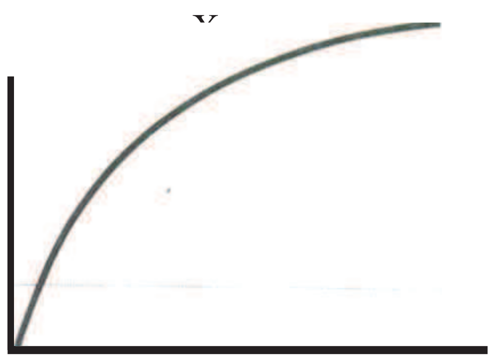
ख. $Y = aX^2 + bX + c$ (रैखिक/परवलय)

ग. $Q = a/p$ (परिमेय/अपरिमेय)

घ. Y (चर—घातांकी/लघु गुणकीय)



ड0. (चर—घातांकी/लघु गुणकीय)



2.9 अभ्यास प्रश्नों के उत्तरः—

1. क. बीजीय ड0. बाह्य ख. समान च. अनेक
   ग. अचर छ. फलन घ शांकव ज. प्रथम
   झ. अदिष्ट फलन
2. क. सत्य ग. सत्य ड0. असत्य ख. असत्य घ. असत्य
3. क. अस्पष्ट ग. परिमेय ड0. लघुगणकीय ख. परवलय घ.चर घातांकीय

2.10 संदर्भ ग्रन्थः—

i. Chiang, A.C.; Fundamental Methods of Mathematical Economics; Mc GRAW – HILL.
ii. Allen, R.G.D.; Mathematical Analysis for Economists, The English Language Book Society and Mc-Millian & Co. Ltd. London.
iii. महेश चन्द्र; मेहरोत्रा, प्रकाश नारायण; अर्थशास्त्रीय गणित; उत्तर प्रदेश हिन्दी ग्रंथ अकादमी, लखनऊ।
iv. Archibald, G.C. and Lipsey R.G.; A Mathematical treatment of Economics; Third Edition; AITBS Publishers & Distributors.
v. Monga, G.S.; Mathematics and Statistics for Economists.

2.11 सहायक ग्रन्थः—

1. मिश्र, जे.पी., गणितीय अर्थशास्त्र, सहित्यभवन पब्लिकेशन।
2. Agarwal, D.R.; Quantitative Methods: Mathematics and Statistics, Vrinda Pub.
3. अग्रवाल, डी.आर.; गणितीय अर्थशास्त्र, वृन्दा पब्लिकेशन्स।
4. मेहता, बी.सी. एवं मदनानी, जी.एम.के; अर्थशास्त्र में प्रारम्भिक गणित;लक्ष्मीनारायण अग्रवाल पब्लिकेशन्स।
5. Mehta, B.C. and Madnani G.M.K; Mathematics for Economists Kitab Mahal Publication.

6. डा0 एस.एन. लाल, डा0 एस.के. चतुर्वेदी एवं डा0 एस. के. लाल; आर्थिक विश्लेषण की तकनीकि; शिव पब्लिकेशन्स।

2.12 निबन्धात्मक प्रश्नः—

क. फलनात्मक सम्बन्ध किसे कहते है। फलनों के विभिन्न भेदों को स्पष्ट कीजिए।

ख. निम्न फलनों को रेखांति कीजिए।

1. पूर्ति फलन
2. लागत फलन

ग. चर से आप क्या समझते हैं। अन्तः तथा बाह्य चरों में भेद स्पष्ट कीजिए।

घ. निम्न में उदाहरण दे कर अन्तर स्पष्ट कीजिएः—

a. स्पष्ट एवं अस्पष्ट फलन
b. परिमेय तथा अपरिमेय फलन
c. बीजीय एवं अबीजीय फलन
d. एक दिष्ट एवं अदिष्ट फलन
e. लघुगुणकीय एवं चर घातांकीय फलन
f. अचर एवं रैखिक फलन

इकाई 3:–अवकलन निर्वचन एवं नियम

इकाई संरचना

3.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में आप फलनात्मक सम्बन्ध व फलनों का अध्ययन कर चुके है। जिसमें आपने यह देखा है कि प्रायः फलनात्मक सम्बन्ध सरल व समानुपाती नही होते है; वरन् इन्हें जटिल गणितीय प्रतिक्रियाओं द्वारा व्यक्त किया जाता है; और जो इस बात को स्पष्ट करते है कि प्रायः स्वतन्त्र चर (चरों) व आश्रित चर के मध्य सम्बन्ध सरल व समानुपाती नही होते है। वस्तुतः स्वतन्त्र चर (चरों) में समान परिमाण में क्रमिक परिवर्तनों के सापेक्ष फलन में होने वाले परिवर्तनों का परिमाण परिवर्तनशील होता है और फलन के परिमाण में परिवर्तन में होने वाले परिवर्तन भी परिवर्तनशील हो सकते है अर्थात् स्वतन्त्र चर में एक निश्चित परिमाण में होने वाले परिवर्तनों के फलस्वरूप फलन में एक निश्चित परिमाण में परिवर्तन होना अनिवार्य नही होता है। दूसरे शब्दों में कहे तो फलन में परिवर्तन की दर परिवर्तित होती रह सकती है। इसी प्रकार फलन में परिवर्तन की दर में परिवर्तन की दर भी परिवर्तित होती रह सकती है, और यह श्रखंला उत्तरोत्तर आगे जा सकती है। कई बार फलन के मान में परिवर्तन की दर में परिवर्तन होते रहने के परिणाम स्वरूप फलन में परिवर्तन की दिशा भी बदल जाती है और किन्ही फलनों में यह दिशा बार–बार परिवर्तित होती है। जैसा कुछ त्रिकोणमितीय फलनों, आवर्ती फलनों या फिर ऋणात्मक अचर आधार के चर घातांकी फलनों $[-a^x]$ में दिखाई पडता है। ऐसी स्थितियों में फलनों में परिवर्तन की दर उनके प्रत्येक बिन्दु पर परिवर्तित होती रहती है। ऐसे फलन जिनके मान में परिवर्तन की दर स्थिर नही होती स्वतन्त्र चर एवं आश्रित चर की दो भिन्न–2 स्थितियों के बीच के छोटे अन्तरों $[\Delta]$ के माध्यम से परिवर्तन की दर की गणना करना त्रुटिपूर्ण परिणाम देता है। फलतः परिवर्तनशील दरों से परिवर्तित होने वाले फलनों के किसी बिन्दु पर परिवर्तन की दर, परिवर्तन की दर मे हो रहे परिवर्तनों की दर आदि तथा इनकी सहायता से फलन की प्रकृति आदि को समझने के लिए स्वतंत्र चर में शून्यसम या शून्योन्मुख परिवर्तन के द्वारा फलन के परिमाण मे होने वाले अत्य अल्प परिवर्तन के माध्यम से फलन में परिवर्तन की दर तथा अन्य उच्च काटि की दरों की गणना की जाती है । इस प्रक्रिया को अवकल प्रक्रिया तथा इस प्रक्रिया से प्राप्त परिणाम को अवकलज और गणित की इस विधा को अवकलन कहते है।

अर्थशास्त्र के विभिन्न सिद्धान्तों की विवेचना करने तथा उन्हे स्पष्टता से समझने व समझाने के लिए विभिन्न प्रकार के फलनों का प्रयोग किया जाता है। जिसका उल्लेख पिछली इकाई में हुआ है। ऐसे में विभिन्न आर्थिक सिद्धान्तों, अर्थव्यवस्था मे क्रियाशील आर्थिक शक्तियों की प्रभावोत्पादकता तथा परस्पर निर्भरता, उनका शक्ति संतुलन इत्यादि विषयों को समझने के लिए अवकलन प्रक्रिया की प्रविधि व विभिन्न कोटि के अवकलजों के अर्थ से सुपरिचित होना नितांत आवश्यक है।

3.2 उददेश्य

इस इकाई का उददेश्य आप विधार्थियों को एक चरीय फलनों के सरल अवकलन के आशय, अवकलन की अवधारणा, अवकलन करने की विधि तथा अवकलज के अर्थो से न केवल परिचित कराना वरन् विभिन्न फलनों के अवकलजों तथा जटिल फलनों यथा फलनों के योग, फलनों के अन्तर, फलनों के गुणनफल, फलनों के भाजफल तथा फलनों के फलन के अवकलन तथा उच्चतर कोटि के अवकलज, उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ एवं नति परिवर्तन बिन्दु आदि ज्ञात करने के नियमों से परिचित कराते हुये विविध उदाहरणों की सहायता से विविध फलनों का अवकलन करने में कुशलता प्राप्त करने में आपका सहयोग करना है। साथ ही अर्थशास्त्र में सरल अवकलन के अनुप्रयोग के द्वारा अर्थशास्त्र में सरल अवकलन की उपयोग्ता रेखांकित करने के साथ–2 आर्थिक सिद्धान्तों के मर्म को (उदाहरणों की सहायता से) समझने योगय बनाना है।

3.3 अवकलनः अवधारणा एवं निर्वचन

पिछली इकाई में फलनात्मक सम्बन्धों का अध्ययन करते हुए हमने देखा है कि स्वतंत्र चर के मान में परिवर्तन के परिणामस्वरूप फलनों के मान में परिवर्तन होता है; एवं विभिन्न प्रकार के फलनों में स्वतंत्र चर के मान और फलन के मान के बीच विभिन्न प्रकार के सम्बन्ध पाये जाते है। फलनात्मक सम्बन्ध को $y = f(x)$ जिसमें x कारण एवं y परिणाम है, द्वारा दिखाते हैं। अतः x के मान बदलने पर y अथवा $f(x)$ का मान परिवर्तित होता है। उदाहरण के लिए यदि x के किसी विशेष का मान x_i को लें तो फलन का मान y_i या $f\ (x_i\ )$ होग। और यदि x के विशेष मान x_j को ले तो फलन

का मान y_j या $f(x_j)$ होग। यदि ग और y के दोनों मानो के बीच के अन्तर को Δx तथा Δy द्वारा दर्शाया जाये तो–

$\Delta x = x_j - x_i$ तथा $\Delta y = y_j - y_i$ या $f(x_j) - f(x_i)$ होग।

फलनात्मक सम्बन्ध के अध्ययन की उपयोगिता इस बात में निहित है कि स्वतंत्र चर (कारण) में कितना परिवर्तन करने से फलन (परिणाम) में वांछित मान प्राप्त किया जा सकता है।

इस सन्दर्भ में फलन के परिवर्तन की दर जिसे $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ द्वारा प्राप्त किया जा सकता है, की गणना महत्वपूर्ण है।

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{\Delta x}$$

यदि फलन फलन सरल रैखिक या अनुपातिक है तो फलन में परिवर्तन की दर सदैव समान बनी रहती है ऐसे में Δx का मान छोटा या बडा होने पर कोई अन्तर नही पडता किन्तु यदि फलन अरैखिक है तो Δx का मान बडा होने पर दो भिन्न–भिन्न स्थितियों के बीच घटित होने वाली विभिन्न परिवर्तन की दरों का एक औसत प्राप्त होग। ऐसे में जबकि प्रत्येक बिन्दु पर फलन की दर परिवर्तित हो रही हो किसी स्थिति विशेष में फलन स्वतंत्र चर के प्रभाव को समझने के लिए स्वतंत्र चर में अत्यल्प या शुन्योन्मुख परिवर्तन के सापेक्ष फलन में परिवर्तन की दर को समझना महत्वपूर्ण हो जाता है। सांकेतिक रूप में स्वतंत्र चर में अत्यल्प या शुन्योन्मुख परिवर्तन को $'\Delta x \to o'$ द्वारा तथा स्वतंत्र चर में अत्यल्प परिवर्तन की स्थिति में फलन में परिवर्तन की दर को $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ द्वारा दर्शाया जाता है। जिसे– $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f\,(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

द्वारा दर्शाया जाता है इसको अवकलन का निर्वचन कहते है। अवकलज के सन्दर्भ में निम्न बातें स्मरणीय है–

1. फलन के सतत् भाग पर ही अवकलन प्राप्त किया जा सकता है।

2. अवकलज स्वयं में एक फलन होता है।

उदाहरण –1 : $y = x^n$ का प्रथम सिद्धान्त से अवकलज प्राप्त कीजिये।

हल – दिया है

$$y = f(x) = x^n$$

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n$$

प्रथम सिद्धान्त से x^n का अवकलज

$$= \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + n\,x^{n-1}\Delta x + n(n-1)\,x^{n-2}\,(\Delta x)^2 + ----(\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{n\,x^{n-1}\Delta x + n(n-1)\,x^{n-2}\,(\Delta x)^2 + ----(\Delta x)^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \{n\,x^{n-1} + n(n-1)\,(x^{n-2})\,\Delta x + ----(\Delta x)^{n-1}\}$$

$$= n\,X^{n-1}$$

स्वतंत्र चर मशुन्योन्मुख परिवर्तनों के सापेक्ष फलन में होने वाले परिवर्तनों की गणना की इस प्रक्रिया को अवकल प्रक्रिया या अवकलन तथा अवकल प्रक्रिया से प्राप्त परिणाम $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ या $\frac{d}{dx}(y)$ को अवकलज या अवकल गुणांक कहते हैं।

Δx को धीरे–धीरे शुन्योन्मुख अर्थात षून्य के समान छोटा बनाने की किया प्रक्रिया के परिणाम स्वरूप $\frac{dy}{dx}$ (जो Δx के अत्यल्प न होने की स्थिति में वस्तुतः विभिन्न परिवर्तन की दरों का औसत होता है) का एक निश्चित मान प्राप्त होता है। अतः हम कह सकते है

कि अवकलन फलन के मान में परिवर्तन की दर का एक निश्चित मान प्राप्त करने की प्रक्रिया है। यहाँ यह ध्यान देने योग्य है कि $\frac{dy}{dx}$ में dy तथा dx दो अलगा–2 मान न होकर $\frac{dy}{dx}$, y के x के सापेक्ष अवकलन की प्रक्रिया $(\frac{dy}{dx})$ द्वारा प्राप्त परिणाम को दर्शाता है।

3.4 सीमा की अवधारणा

अवकलज $\frac{dy}{dx}$ को x तथा y में परिवर्तनों के भाजफल की सीमा के रूप में दर्शाया जाता है। सरलता के लिये यदि हम $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ को चर q तथा Δx को चर h द्वारा दर्शाये तो

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} q$ ।

जहाँ q h का फलन है तथा q का मान h के मान पर निर्भर है।

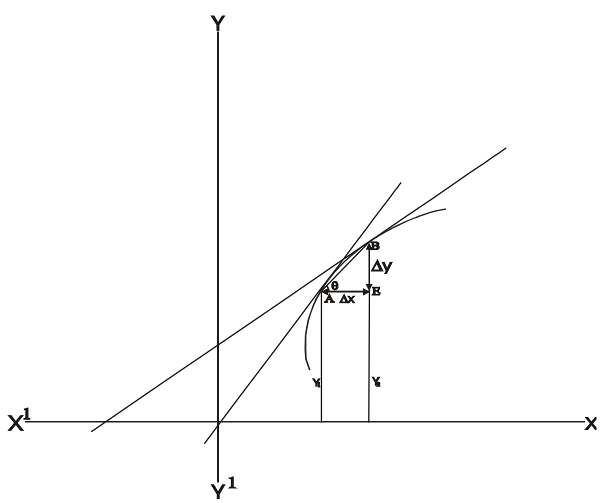
अतः अवकलन तथा अवकलज को पूर्ण रूप से समझने के लिए सीमा की अवधारणा को समझना आवश्यक है।

$h \to 0$ से तात्पर्य है कि चर x का मान चर x के एक विशिष्ट मान x_0 की ओर अग्रसर है यहा यह ध्यान देने योगय है कि x के विशिष्ट मान x_0 को दो दिशाओं – बायीं दिषा अर्थात x के मान कमशः बढते हुए x_0 की ओर अथवा दाहिनी दिशा से अर्थात कमशः घटते हुए x_0 की ओर – से अग्रसर हो सकते है। बायीं दिशा से x_0 की ओर अग्रसर होने की स्थिति में x का मान x_0 से छोटे होते है तथा $(x - x_o)$ अथवा $h < 0$ या ऋणात्मक होता है। जो अन्तर घटने के साथ शून्य की ओर अग्रसर होता है अर्थात h का मान ऋणात्मक से शून्य की ओर अग्रसर होता है जिसे हम $\lim_{\Delta x \to 0^-} q$ तथा इसी प्रकार x के मान जब दाहिनी ओर से x_0 की ओर अग्रसर होते है तो h मान धनात्मक से शून्य की ओर अग्रसर होता है जिसे हम $\lim_{\Delta x \to 0^+} q$ लिखते हैं।

3.5 अवकलज से आशय

1. अवकलज एक दिये हुये बिन्दु पर फलन में परिवर्तन की दर को बताता है।

2. अवकलज को $\frac{dy}{dx}$ के अतिरिक्त y' अथवा $f'(x)$ या महज f' अथवा Dy या $Df(x)$ द्वारा भी दर्शाया जाता है।
3. अर्थशास्त्र में प्रयुक्त होने वाली सीमान्त मानों की अवधारणा दिये ग्ये आर्थिक फलन के अवकलज के समतुल्य होती है अर्थात किसी आर्थिक फलन का सीमान्त मान ज्ञात करने के लिए उस फलन का अवकलज ज्ञात किया जाता है।
4. अवकलज एवं फलन की ढाल अथवा प्रवणता : फलन के एक दिये हुये बिन्दु पर फलन का अवकलज उस बिन्दु पर फलन की ढाल का मान बताता है। अर्थात फलन की ढाल फलन के अवकलज की ज्यामितीय व्याख्या के समतुल्य होती है। जिसे हम निम्न रेखाचित्र के ज्यामितीय विश्लेषण द्वारा समझ सकते है।



चित्र में फलन $f(x)$ पर दो बिन्दु $a(x_1, y_1)$ और $B\ (x_2, y_2)$ को मिलाने वाली रेखा x अक्ष के साथ तथा BE के साथ $\theta°$ का कोण बना रही है रेखा AB की ढाल $\tan\theta = \frac{BE}{AE} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$यदि बिन्दु B को खिसका कर A के इतने निकट ले आये कि A और Bके बीच का अन्तर शून्य जितना हो जाये अर्थात $\Delta x \to 0$ तो AB

रेखा A बिन्दु पर खींची गयी स्पर्श रेखा बन जायेगी तथा इसकी ढाल $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ या $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ द्वारा मापी जायेगी।

<u>कुछ प्रमुख फलनों के प्रथम अवकलज</u>

1. $\frac{d}{dx}\, x = \frac{dx}{dx} = 1$

2. $\frac{d}{dx}\, x^n = \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$

3. $\frac{d}{dx}\, a.x^n = a\, \frac{dx^n}{dx} = a.nx^{n-1}$ ($a =$ अचर पद)

4. $\frac{d}{dx}\, a = \frac{da}{dx} = 0$ $a =$ (अचर पद)

5. $\frac{d}{dx}\, e^x = \frac{d\, e^x}{dx} = e^x$

6. $\frac{d}{dx}\, e^{ax} = \frac{de^{ax}}{dx} = a.e^{ax}$

7. $\frac{d}{dx}\, \log x = \frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x}$

8. $\frac{d}{dx}\, a.\log x = a.\frac{d \log x}{dx} = \frac{a}{x}$

9. $$\frac{d}{dx}\, a^x = \frac{d a^x}{dx} = a^x \ \log a$$

10. $$\frac{d}{dx}\ \sin x = \frac{d \sin x}{dx} = \cos x$$

11. $$\frac{d}{dx} \cos x = \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$$

12. $$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{d \tan x}{dx} = \cot x$$

3.7 एक ही चर के दो या दो से अधिक फलनों के संयोगा से बनने वाले फलनों के अवकलन के नियम

कई बार फलन एक ही चर के दो या दो से अधिक फलनों के योग अथवा फलनों के अन्तर या फलनों के गुणनफल या भाजफल के रूप में होते है। इस भाग में हम ऐसे ही फलनों के अवकलन करने की विधि से परिचित होंगे। सरलता के लिये एक ही चर के दो फलनों के विभिन्न संयोगो का अवकलन करने के नियम नीचे दिये है। दो से अधिक फलनों के संयोगो को इन्हीं नियमों की सहायता से अवकलित किया जा सकता है।

3.7.1 दो फलनों के योग अथवा अन्तर के अवकलन का नियमः यदि $y = f(x) : y = ax^2 + bx$ यहाँ y x का एक ऐसा फलन है जो x के दो फलनों (i) $a\,x^2$ तथा (ii) $b\,x$ का योग है। यदि हम $a\,x^2$ को $g(x)$ तथा $b\,x$ को $h\,(x)$ द्वारा चिन्हित करें तो

$$y = f\,(x) : \ f(x) = g\,(x) + \ h\,(x)$$

इसी प्रकार यदि

$$y = f\ (x) \ : \ y = ax^2 - \ b\,x \ \text{तो}$$

$$y = f\ (x) : \ f\ (x) = g(x) - \ h\,(x)$$

इन दशाओं में y का अवकलज g तथा h के अवकलजों का तदानुसार योग अथवा अन्तर होग। अर्थात यदि $f(x) = g(x) \pm h(x)$ तो

$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} g(x) \pm \frac{d}{dx} h(x)$ या

$$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

उपरोक्त उदाहरण में यदि $y = ax^2 + bx$ तो

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(a x^2 + bx) = \frac{d}{dx}(a x^2) + \frac{d}{dx}(bx)$$

$$= a.\frac{d}{dx} x^2 + b \frac{d}{dx} x$$

$$= a.2x + b.$$

$$= 2 +$$

इसी प्रकार $y = ax^2 - bx$ का अवकलज $\frac{dy}{dx} = 2ax - b$ होग।

3.7.2 दो फलनों के गुणनफल के अवकलन का नियम :–यदि $y = f(x)$: $y = x^n . e^x$ हो तो $y\,x$ के दो फलनों, x^n {जिसे $g(x)$ मानें} तथा e^x {जिसे $h(x)$ मानें} का गुणनफल है। इस फलन का अवकलन निम्नवत् किया जाता है।

$$y = f(x) = g(x).\ h(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \{g(x).\ h(x)\}$$

$$= g(x).\frac{d}{dx} h(x) + h(x).\frac{d}{dx} g(x)$$

या $f'(x) = g(x).\ h'(x) + h(x).\ g'(x)$

तदानुसार $y = x^n . e^x$ का अवकलन

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^n, e^x) = x^n . \frac{d}{dx} e^x + e^x \frac{d}{dx} x^n$$

$$= x^n . e^x + e^x . n . x^{n-1}$$

$$e^x . x^{n-1} (x+n)$$ होगा।

3.7.3 दो फलनों के भाजफल के अवकलन का नियमः

यदि $y = f(x) : y = \frac{logx}{x}$ हो तो y x के दो फलनों $\log x$ {जिसे $g(x)$ माने} तथा x {जिसे $h(x)$ माने} तो $y = \frac{g(x)}{h(x)}$ होग जिसके अवकलन का नियम निम्नवत् है।

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{h(x). \frac{d}{dx} g(x) - g(x). \frac{d}{dx} h(x)}{\{h(x)\}^2}$$

या

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{h(x). \; g'(x) - g(x). \; h'(x)}{\{h(x)\}^2}$$

तदानुसार $y = f(x) : \; y = \frac{\log x}{x}$ हो तो

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\log x}{x}\right) = \frac{x \frac{d}{dx} \log x - \log x \; \frac{d}{dx}(x)}{x^2}$$

$$= \frac{x \frac{1}{x} - \log x}{x^2}$$

$$= \frac{1 - \log x}{x^2}$$

$$= (1 - \log X) x^{-2}$$

3.7.4 श्रंखला नियम :– पिछले अनुभाग मे हमने फलनों के योग, अन्तर, गुणनफल तथा भाजफल के अवकलन करने के नियमों का अध्ययन किया है, इस अनुभाग में हम ऐसे जटिल फलनों के अवकलन करने की विधि का अध्ययन करेंगे, जिनकों सीधे–सीधें अवकलित करना जटिल तथा कईबार सम्भव नही होता है। अपितु जिनको फलनों के

फलनों की एक श्रंखला के रूप में समझकर सहजता से अवकलित किया जा सकता है अवकलन के इस नियम को अवकलन का श्रंखला नियम कहते है।

यदि $y = (x)$: $y = (3x+2)^2$ तो $3x+2$ को यदि हम t मान ले तो $y = t^2$ अर्थात y t का एक फलन है जिसे $y = g\ (t)$ मान सकते है। तथा t स्वयं x का फलन है। जहाँ $t = h\ (x)$: $h\ (x) = (3x+2)$ है।

इस प्रकार अब $y = f\ (x) = g\ [h\ (x)]$ ऐसे फलनों का अवकलन का नियम निम्न प्रकार है – $\frac{dy}{dx} = \frac{d[g\{h\ (x)\}]}{dh(x)} \cdot \frac{dh(x)}{d(x)}$

अथवा $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

तदानुसार –

$$\frac{d}{dx}(3x+2)^2 = \frac{d}{dt}\ t^2 \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= 2\ t \cdot \frac{d(3x+2)}{dx} \quad t = 3x+2 \text{ रखने पर}$$

$$= 2(3x+2).3$$

$$= 6(3x+2)$$

$$= 18x+12$$

उदाहरणः–2 – यदि $y = a^{[sinx]^2}$ का अवकलन करना हो तो हम मान लेगे $[sinx]^2 = t$ अब $y = a^t$ होग तथा y, t के फलन के रूप में प्रस्तुत है जिसे हम $y = g(t)$: $y = a^t$ लिखेंगे जहाँ t स्वयं $sinx$ का एक फलन है। जिसे $t = h(sinx)$; यदि $sinx = u$ मान लें तो $t = h(u): t = u^2$ जहाँ u स्वयं x का एक फलन है $u = k(x): k(x) = sinx$ होगा।

इस प्रकार

$$y = g(t) = g[h(u)] = g[h\{k(x)\}]$$

तथा $$\frac{dy}{dx} = \frac{d\ g(t)}{dt} \cdot \frac{d\ h(u)}{du} \cdot \frac{d\ k(x)}{dx}$$

या $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

तदानुसार $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[a^{(sinx)^2}\right] = \frac{d}{dt}\ a^t . \frac{du^2}{du}\ \frac{d\ sinx}{dx}$

या $$\frac{dy}{dx} = a^{t} \cdot \log a\ .\ 2u\ :\ \cos x$$

$= a^{[\sin x]^2}\ .\ \log a\ .2 \sin x\ .\ \cos x$

[t तथा u का मान प्रतिस्थापित करने पर]

$$= a^{[\sin x]^2}\ .\ \log a\ .\ \sin 2\,x$$

3.8 उच्चतर कोटि के अवकलज

यदि किसी फलन $y = f(x)$ का x के सापेक्ष एक बार अवकलन करते है तो इस प्रक्रिया को प्रथम कोटि का अवकलन तथा उससे प्राप्त अवकलज को प्रथम कोटि का अवकलज या प्रथम अवकलज $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ कहते है। यदि प्रथम कोटि के अवकलज को पुनः अवकलित किया जाये तो द्विती कोटि का अवकलज $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ प्राप्त होता है। इसी प्रकार अवकलन प्रक्रिया की पुनरावृत्ति करते जाने पर उच्चतरकोटि के अवकलज $\left(\frac{d^3y}{dx^3}, \ldots\ldots\ldots..\right)$ प्राप्त होते जाते है।

उदाहरण :–

$a_o + a, x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$ का

प्रथम अवकलज :– $\frac{dy}{dx} = a, + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3$

द्वितीय अवकलज :– $\frac{d^2y}{dx^2} = 2a_2 + 2a_3 x + 12a_4 x^2$

तृतीय कोटि का अवकलज :– $\frac{d^3y}{dx^3} = 6a_3 + 24a_4 x$

चतुर्थ कोटि का अवकलज :– $\frac{d^4y}{dx^4} = 24a_4$

पंचम कोटि का अवकलज :– $\frac{d^5y}{dx^5} = 0$

दिये हुये फलन के लिये इससे उच्च काटि के अवकलज प्राप्त करना सम्भव नहीं है।

प्रत्येक अवकलज अपने से पूर्व कोटि के अवकलज फलन में परिवर्तन की दर को बताता है। हम जानते है कि प्रथम अवकलज $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ फलन में परिवर्तन की दर अथवा फलन की ढाल अथवा फलन के सीमान्त मान को बताता है। अतः द्वितीय कोटि का अवकलज फलन में परिवर्तन की दर में हो रहे परिवर्तन की दर अथवा फलन की ढाल में हो रहे परिवर्तन की दर अथवा फलन के सीमान्त मान में होने वाले परिवर्तन की दर को बताता है। उच्चतर कोटि के अवकलजों का आशय इसी प्रकार समझा जा सकता है।

3.9 उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ

जब किसी फलन $y = f(x)$ के लिये स्वतंत्र चर (x) का मान बढने पर फलन (y) का मान आरम्भ में बढें किन्तु एक स्तर पर पहुँचने के बाद घटना आरम्भ हो जाये तो उस स्तर पर y का मान अपने ठीक पहले व ठीक बाद के मानों की तुलना में सर्वोच्च होता है। इसी प्रकार यदि स्वतंत्र चर (x) का मान बढने पर फलन (y) का मान एक स्तर तक घटने के बाद बढने लगे तो उस स्तर पर फलन का मान ठीक पहले व ठीक बाद की तुलना में निम्नतम् होता हैं। किन्तु एक फलन में ऐसे सर्वोच्च तथा निम्नतम मान वाले अनेक बिन्दु प्राप्त हो सकते है। अतः इन बिन्दुओं को सामूहिक रूप से उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ कहा जाता है। किसी फलन का मान बढने के बाद घटने लगे तो यह तभी सम्भव है जब फलन के मान में हो रहा धनात्मक परिवर्तन घटते घटते ऋणात्मक हो जाये इस घटनाक्रम में एक स्थिति ऐसी प्राप्त होगी जब फलन के मान में परिवर्तन की दर शून्य होगी यही स्थिति उच्चिष्ठ की होगी।

इसी प्रकार जब फलन का मान घटने के बाद बढनें लगे तब यह तभी सम्भव है जब फलन के मान में हो रहा ऋणात्मक परिवर्तन बढते–बढते (अर्थात परिवर्तन का परिमाण कम हो रहा हो) धनात्मक हो जाये। इस घटनाक्रम में एक स्थिति ऐसी प्राप्त होगी जब फलन में परिवर्तन की दर शून्य होगी यही निम्निष्ठ की स्थिति होगी।

उपरोक्त विवरण से यह स्पष्ट है कि उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ दोनो ही स्थितियों में फलन में परिवर्तन की दर $\frac{dy}{dx} = 0$ – आवश्यक शर्त।

उच्चिष्ठ की स्थिति में फलन में परिवर्तन की दर धनात्मक से लगातार घटकर ऋणात्मक हो जाती है। अर्थात फलन में परिवर्तन की दर में परिवर्तन की दर $(\frac{d^2y}{dx^2})$ लगातार ऋणात्मक प्राप्त होता है अतः उच्चिष्ठ की स्थिति में $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ – पर्याप्त शर्त।

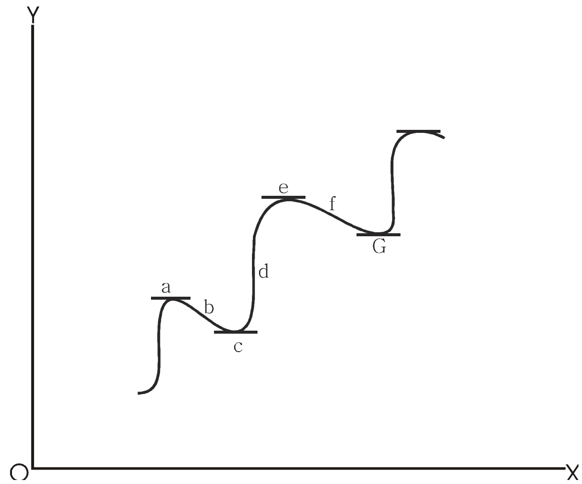
इसी प्रकार निम्निष्ठ की स्थिति में फलन में परिवर्तन की दर ऋणात्मक से बढते–बढते धनात्मक हो जाती है अर्थात फलन में परिवर्तन की दर में परिवर्तन की दर $(\frac{d^2y}{dx^2})$ लगातार धनात्मक प्राप्त होती है। अतः निम्निष्ठ की स्थिति में –

$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ – पर्याप्त शर्त

उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ की आवश्यक एवं पर्याप्त शर्त :–

	आवश्यक शर्त	पर्याप्त शर्त
उच्चिष्ठ	$\frac{dy}{dx} = 0$	$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$
निम्निष्ठ	$\frac{dy}{dx} = 0$	$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ को उभयनिष्ठ रूप से चरममान या अति मान भी कहते है।



चित्र 3.2 में बिन्दु a तथा e उच्चिष्ठ एवं c तथा g निम्निष्ठ बिन्दु है जिन पर स्पर्ष रेखा $x-$ अक्ष के समानान्तर है अर्थात जिनकी ढाल शून्य $(\frac{dy}{dx} = 0)$ है।

उदाहरण :– फलन में $y = f(x)$: $y = \frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 20x + 200$ में चरम मान ज्ञात कीजिए एवं उनकी पहचान कीजिए।

हल – दिया है $y = f(x)$: $y = \frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 20x + 200$

चरम मान ज्ञात करने हेतु दिये हुये फलन को x के सापेक्ष अवकलित करने पर $\frac{dy}{dx} = x^2 - 12x + 20$

चरममान की आवश्यक शर्तानुसार $\frac{dy}{dx} = 0$ रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 12x + 20 = 0$$

$$=> \quad x^2 - 10x - 2x + 20 = 0$$

$$=> \quad x(x-10) - 2(x-10) = 0$$

$$=> \ (x-2)\,(x-10)=0$$

=> या $x-2 \ =0$ या $x-10 \ =0$

=> या $x=2$ => या $x=10$

अब चरममान हेतु पर्याप्त शर्त के लिये $\frac{dy}{dx}$ को x के सापेक्ष पुनः अवकलित करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x-12$$

अब $x=2$ रखने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\,(2)-12 = 4-12 = -8 \ < 0$$

अतः पर्याप्त शर्तानुसार बिन्दु $x=2$ पर फलन का मान उच्चिष्ठ है।

पुनः $x=10$ रखने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\,(10)-12 = 20-12 = 8 \ > 0$$

अतः पर्याप्त शर्तानुसार बिन्दु $x=10$ पर फलन का मान निम्निष्ठ है

3.10 नति परिवर्तन बिन्दु

नति परिवर्तन बिन्दु वह बिन्दु है जिस पर फलन की नति या वक्रीयता परिवर्तित हो रही हो। अर्थात ऐसा बिन्दु जिस पर फलन की $x-$अक्ष के प्रति उत्तलता अवतलता में परिवर्तित हो रही हो अथवा फलन की अब $x-$अक्ष के प्रति अवतलता उत्तलता में परिवर्तित हो रही हो।

पिछले अनुभाग में हमने देखा है कि जब 'फलन में परिवर्तन की दर में परिवर्तन की दर' या 'फलन की ढाल में परिवर्तन की दर' जब ऋणात्मक होती है ($\frac{d^2y}{dx^2} \ < 0$) तो फलन $x-$अक्ष के प्रति अवतल होता है। इसके विपरीत जब 'फलन में परिवर्तन की दर परिवर्तन की दर' या 'फलन की ढाल में परिवर्तन की दर' जब धनात्मक होती है ($\frac{d^2y}{dx^2} \ > 0$) तो फलन $x-$अक्ष के प्रति उत्तल होता है।

अतः स्पष्ट है कि फलन की नति परिवर्तित होने के लिये यह आवश्यक है कि $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान शून्य हो ($\frac{d^2y}{dx^2}$ को धनात्मक से ऋणात्मक या ऋणात्मक से धनात्मक होने के लिये शून्य से होकर गुजरना पडेग) उसे नति परिवर्तन बिन्दु की आवश्यक शर्त कहते है अर्थात जिस बिन्दु पर $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ वह नति परिवर्तन बिन्दु हो सकता है क्योंकि नति के परिवर्तित होने के लिए यह आवश्यक है कि अग्ले ही बिन्दु पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान शून्य न हो ($\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ से बदलकर $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ हो जाये या $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ से बदलकर $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ हो जाये) अर्थात नति परिवर्तन बिन्दु पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ में परिवर्तन की दर $(\frac{d^3y}{dx^3})$ शून्य नही होगी; यह धनात्मक या ऋणात्मक कुछ भी हो सकती है।

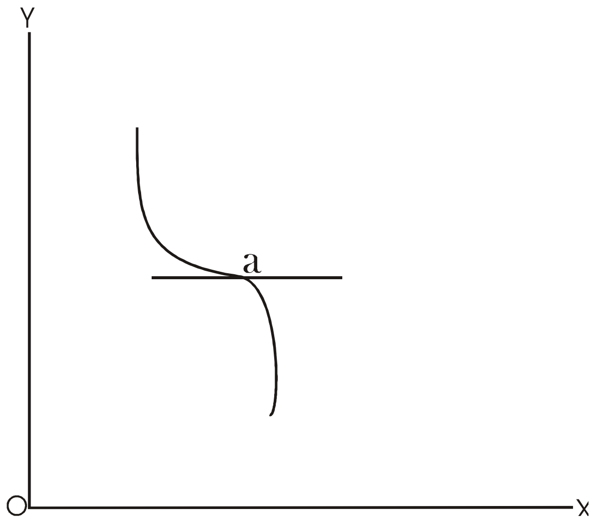
अतः नति परिवर्तन बिन्दु की पर्याप्त शर्त $\frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$ होगी।

नति परिवर्तन बिन्दु के लिये –

1. $\frac{d^2y}{dx^2} = 0\,;$ आवश्यक शर्त
2. $\frac{d^3y}{dx^3} \neq 0\,;$ पर्याप्त शर्त

चित्र 3.2 में बिन्दु $b\,,d,$ तथा f नति परिवर्तन बिन्दु है। नति परिवर्तन बिन्दुओं पर स्पर्श रेखायें स्पर्श को काटती है।

यदि किसी नति परिवर्तन बिन्दु पर प्रथम अवकलज $\frac{dy}{dx}$ का मान शून्य नही होता है। तो वह बिन्दु अस्थिर नति परिवर्तन बिन्दु कहलाता है। देखें चित्र 3.2 के बिन्दु $b\,,d,f$ किन्तु यदि किसी नति परिवर्तन बिन्दु पर प्रथम अवकलज $\frac{dy}{dx}$ का मान शून्य हो तो वह बिन्दु स्थिर नति परिवर्तन बिन्दु कहलाता है। देखें चित्र 3.3। इस बिन्दु पर स्पर्श रेखा $x-$ अक्ष के सामानान्तर होती है।



नति परिवर्तन बिन्दु

अस्थिर : $\frac{dy}{dx} \neq 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, $\frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$

स्थिर : $\frac{dy}{dx} = 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, $\frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$

उदाहरणः–

फलन $y = f(x): y = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 40x + 120$ के लिए नति परिवर्तन बिन्दुओं को प्राप्त कीजिए।

y को x के सापेक्ष अवकलित करने पर $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 12x^2 - 36x + 40$

$\frac{dy}{dx}$ को पुनः x के सापेक्ष अवकलित करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 24x - 36$$

नति परिवर्तन बिन्दु की आवश्यक शर्त के अनुसार $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

$$=> \quad 12x^2 - 24x - 36 = 0$$

$$=> \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$=> \quad x^2 - 3x + x - 3 = 0$$

$$=> \quad x(x-3) + 1(x-3) = 0$$

$$=> \quad (x-3) \quad (x+1) = 0$$

=> या $x - 3 = 0$ या $x + 1 = 0$

=> $x = 3$ => $x = -1$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ को पुनः x के सापेक्ष अवकलित करने पर

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 24x - 24$$

$x = -1$ रखने पर $\frac{d^3y}{dx^3} = 24(-1) - 24 = -48 \neq 0$

अतः नति परिवर्तन की पर्याप्त शर्तानुसार बिन्दु $x = -1$ एक नति परिवर्तन बिन्दु है।

पुनः $x = 3$ रखने पर $\frac{d^3y}{dx^3} = 24(3) - 24 = 48 \neq 0$

अतः नति परिवर्तन की पर्याप्त शर्तानुसार $x = 3$ की एक नति परिवर्तन बिन्दु है।

अतः दिये गये फलन में दो बिन्दुओं, $x = -1$ तथा $x = 3$ पर नति परिवर्तन हो रहा है अतः उक्त फलन में दो नति परिवर्तन बिन्दु प्राप्त हुए है।

3.11 आर्थिक अनुप्रयोग

3.11.1 प्रथम अवकलज के आर्थिक अनुप्रयोग :–

सीमान्त मान :– विभिन्न आर्थिक फलनों जैसे आय फलन, लागत फलन, उपयोग फलन, उत्पादन फलन आदि का प्रथम अवकलज उनके सीमान्त मानों को बताता है। जिसे विभिन्न उदाहरणों द्वारा नीचे स्पष्ट किया गया है।

उदाहरणः– किसी फर्म का लागत फलन $c = \frac{1}{3} q^3 - 2.5 q^2 + 6q + 25$ दिया हो तो 5 वीं इकाई की उत्पादन की लागत ज्ञात कीजिए। जहाँ c कुल लागत तथा q उत्पादन स्तर है।

हल– दिया $c = \frac{1}{3} q^3 - 2.5q^2 + 6q + 25$

5 वीं इकाई की उत्पादन लागत वस्तुतः उत्पादन स्तर 5 वीं इकाई पर फर्म की सीमान्त लागत होगी अतः सीमान्त लागत $M\,C$ के लिये लागत फलन c को q के सापेक्ष अवकलित करने पर –

$$M\,C = \frac{dc}{dq} = q^2 - 5q + 6$$

$q = 5$ रखने पर $M\,C = (5)^2 - 5(5) + 6 = 6$

अतः 5 वीं इकाई की उत्पादन लागत $= 6$ होगी।

उदाहरणः– एक उत्पादक के लिये माँग फलन $P = 7 - 0.5x$ है तो उत्पादक को तीसरी इकाई के विक्रय से कितनी आय प्राप्त होगी।

हल– तीसरी इकाई से प्राप्त आय तीसरी इकाई के विक्रय से सीमान्त आय होगी। कुल आय $R =$ विक्रय मात्रा $(x) \times$ मूल्य (p)

अब कुल आय $R = x.p$

$= x \times (7 - 0.5x)$

$= 7x - 0.5\ x^2$

सीमान्त आय $M\,R = \frac{dR}{dx} = \frac{d}{dx}\ (7x - 0.5\ x^2) = 7 - x$

$x = 3$ रखने पर $M\,R = 7 - 3 = 4$

अतः तीसरीं इकाई से प्राप्त सीमान्त आय $= 4$ है।

उदाहरणः–3 माँग फलन $x = 15 - p - 0.2\ \ p^2$ के बिन्दु $p = 5$ पर माँग की लोच ज्ञात कीजिये।

हल– दिया है $p = 5$ इस मूल्य पर मात्रा

$x = 15 - 5 - 0.2\ \ (5)^2$

$$= 15 - 5 - 5 = 5$$

अब माँग की लोच

$e = -\frac{dx}{dp}\ .\ \frac{p}{x}$ निकालने के लिये

x को p के सापेक्ष अवकलित करने पर

$$\frac{dx}{dp} = 0 - 1 - 0.4p$$

$p = 5$ रखने पर $\frac{dx}{dp} = -1 - 0.4\,(5) = -1 - 2 = -3$

अतः $e = -\{-3 \times \frac{5}{5}\} = 3$

उदाहरणः–4 औसत आय सीमान्त आय तथा माँग की लोच के बीच सम्बन्ध स्थापित कीजिए।

हल– $R = p.\ x$ जहाँ R कुल आय, $p.$ कुल मूल्य स्तर तथा x माँग स्तर है।

सीमान्त आय $\quad MR = \frac{dR}{dx} = \frac{d}{dx}\ (p.x)$

$$= p.\ \frac{dx}{dx} + x.\ \frac{dp}{dx}$$

{चूँकि p x का एक फलन है।}

$$= p + x\ \frac{dp}{dx}$$

$$= p\ \{1 + \frac{x}{p}.\frac{dp}{dx}\ \}$$

$$= p\ \{1 - \frac{1}{e}\ \}$$

{ चूँकि $e = -\frac{dx}{dp}\ .\ \frac{x}{p}$ }

या $\quad MR = AR\ \{1 - \frac{1}{e}\ \}$ $\quad$ चूँकि $p = AR$

3.11. 2 द्वितीय एवं उच्चतर कोटि के अवकलनों के आर्थिक अनुप्रयोग– उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ के आथिक अनुप्रयोगः–

उदाहरण–5 एक उत्पादक के लिए माँग फलन $q = 120 - 0.5p - 0.3p^2$ दिया है; अधिकतम आय प्राप्त करने के लिये उत्पादक कितनी इकाइयों का विक्रय करेग।

हल– दिया है माँग फलन $q = 120 - 0.5p - 0.3p^2$

अब कुल आय $(R) = p.q$

$= (120 - 0.5p - 0.3p^2)\ x\ p$

$= 120p - 0.5p^2 - 0.3p^3$

आय के अधिकतमीकरण हेतु आवश्यक शर्त $\frac{dR}{dp} = 0$

$=> \frac{d}{dp} \quad (120p - 0.5p^2 - 0.3p^3) = 0$

या $\quad 120 - p - 0.9p^2 = 0$

या $\quad -0.9p^2 - p + 120 = 0$

या $\quad p = \frac{+1 \pm \sqrt{.1 - 4(120 \times -0.9)}}{2 \times -0.9}$

$= \frac{+1 \pm \sqrt{1+432}}{-1.8}$

$= \frac{+1 \pm 20.8}{-1.8}$

$=> \quad p = \frac{+1+20.8}{-1.8} \qquad$ या $p = \frac{1-20.8}{-1.8}$

$=> \quad p = \frac{21.8}{1.8}$ जो स्वीकार्य नही है क्योंकि मूल्य ऋणात्मक नहीं हो सकता है।

अतः $\quad p = \frac{19.8}{1.8} = 11$

$\frac{dR}{dp}$ का पुनः p के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d^2p}{dp^2} = -1 - 1.8p$$

$p = 11$ रखने पर

$$\frac{d^2p}{dp^2} = -1 - 1.8(11) = -1 - 19.8$$

$= -20.8 < 0$ जो कि R के अधिकतम होने की पर्याप्त शर्त है।

अतः हम कहेगें कि $p = 11$ पर आय अधिकतम है।

उदाहरण6:— दर्शाइये कि सीमान्त लागत वक्र औसत लागत वक्र के न्यूनतम बिन्दु पर उसको नीचे से काटता है।

हल— माना लागत फलन $c = f(Q)$है।

औसत लागत फलन $(AC) = \frac{C}{Q}$

औसत लागत फलन के न्यूनतम बिन्दु होने के लिये आवश्यक शर्त $\frac{d(AC)}{dQ} = 0$

$$=> \frac{d}{dQ} \left(\frac{C}{Q}\right) = 0$$

$$=> \frac{Q.\ \frac{dc}{dQ} - c.\frac{dQ}{dQ}}{Q^2} = 0$$

$$=> Q.\frac{dc}{dQ} - c = 0\ (\because Q \neq> 0)$$

$$=> \frac{dc}{dQ} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{Q}} \quad => \quad MC = AC$$

अर्थात AC के न्यूनतम बिन्दु पर MC वक्र AC वक्र को काटता है।

औसत लागत वक्र के न्यूनतम बिन्दु के लिए पर्याप्त शर्त

$$\frac{d^2AC}{dQ^2} > 0$$

$$=> \frac{d}{dQ}\left(\frac{Q.MC - C}{Q^2}\right) > 0$$

$$=> \frac{Q^2.\{\frac{d}{dQ}\ Q.MC - \frac{dc}{dQ}\} - \{(QMC - C) \times \frac{d\ Q^2}{dQ}\}}{Q^4} > 0$$

$$=> Q^2[\{Q.\frac{d}{dQ}MC + MC.\frac{dQ}{dQ}\} - MC] - \{(QMC - C)2Q\} > 0$$

$$\because Q > 0$$

$$=> Q^3.\frac{d}{dQ}\ MC + MCQ^2 - MCQ^2 - 2MCQ^2 + 2QC\ > 0$$

$$=>\ Q^3\ \frac{d}{dQ}\ MC - 2Q^2\ \left(MC - \frac{2QC}{Q^2}\right) \lessgtr 0$$

$$[\because MC = AC\ and\ Q > 0]$$

$$=>\ \frac{d}{dQ}\ MC > 0$$

अर्थात जब MC वक्र MR वक्र को उसके न्यूनतम बिन्दु पर काटता है तो उस समय MC वक्र का ढाल धनात्मक होता है अर्थात MC वक्र बायें से दायें ऊपर की ओर उठ रहा होता है; अतः यह सिद्ध हुआ की MC वक्र AC वक्र को उसके न्यूनतम बिन्दु पर काटता है।

उदाहरण 7:– फर्म के सन्तुलन की शर्त समझाइये।

हल – फर्म का उद्देश्य लाभ अधिकतम करना होता है।

फर्म का लाभ = आगम – कुल लागत

या $\pi = R - C$ जहाँ $\pi, R, C,$ सभी उत्पादक स्तर (Q) के फलन है। फर्म के लाभ अधिकतम करने की आवश्यक शर्त $\frac{d\pi}{dQ} = 0$

$$=>\ \frac{d}{dQ}\ (R - C) = 0$$

$$=> \frac{dR}{dQ}\ - \frac{d}{Q}\ C = 0$$

$$=>\ \frac{dR}{dQ} = \frac{dC}{dQ}$$

या $MR = MC$

फर्म का लाभ अधिकतम करने की पर्याप्त शर्त

$$\frac{d^2\pi}{dQ^2} < 0$$

$$=> \quad \frac{d}{dQ}\left(\frac{d}{dQ}R - \frac{d}{dQ}\ C\right) \ < 0$$

$$=> \quad \frac{d}{dQ}\ (MR - MC) \quad < 0$$

$$=> \quad \frac{d}{dQ}\ MR - \frac{d}{dQ}\ MC \quad < 0$$

$$=> \quad \frac{d}{dQ}\ MR \ < \frac{d}{dQ}\ MC$$

अर्थात जब लाभ अधिकतम होता है तो सीमान्त आगम (MR) तथा सीमान्त लागत(MC) बराबर होते है तथा सीमान्त आगम को सीमान्त लागत वक्र नीचे से काटता है।

इसी प्रकार उपभोग फलन का अवकलन करने पर सीमान्त उपभोग प्रवृत्ति (MPC), बचत फलन का अवकलन करने पर सीमान्त बचत प्रवृत्ति (MPS), विनियोग फलन का अवकलन करने पर सीमान्त विनियोग प्रवृत्ति (MPI) आदि प्राप्त होते है।

3.11.3 उत्पादक/फर्म पर करारोपण :

फर्म पर कई प्रकार से करारोपण किया जा सकता है। इस भाग में हम उदाहरणों की सहायता से करारोपण की विभिन्न विधियों को उत्पादन, मूल्य, लाभ आदि पर पडने वाले प्रभावों का अध्ययन करेगें।

(1) जब फर्म पर एकमुश्तकर लगा दिया जाए (अनुज्ञाशुल्क/लेवी)

यदि फर्म का माँग फलन $P = 21 - 0.6x$ तथा लागत फलन $C = x^2 + 5x + 5$ हो और सरकार फर्म पर एक मुश्त कर 10रू0 लगा दे तो संतुलन मूल्य, उत्पादन स्तर का फर्म के ऊपर क्या प्रभाव पडेगा।

करारोपण से पूर्व

फर्म का लाभ $\pi = R - C$

$$= (21 - 0.6x)x - (x^2 + 5x + 5)$$

या $\pi = -1.6x^2 + 16x - 5$

लाभ अधिकतम की आवश्यक शर्त

$\frac{d\pi}{dx} = 0 => -3.2x + 16 = 0$ या $x = 5$

पर्याप्त शर्त

$$\frac{d^2\pi}{dx^2} = (-3.2x + 16) = -3.2 < 0$$

मूल्य $P = 21 - 0.6 \times 5 = 18;$ तथा

लाभ $\pi = 1.6(5)^2 + 16 \times 5 - 5$

$$= -40 + 80 - 5 = 35$$

करारोपण के बाद लागत फलन $c_t = x^2 + 5x + 5 + 10$

तथा $\pi = -1.6x^2 + 16x + 15$

$\frac{d\pi_t}{dx} = 0 => -3.2x + 16 = 0$ या

$x = 5,\ P = 21 - 0.6 \times 5 = 18$

तथा लाभ $\pi = -1.6(5)^2 + 16 \times 5 - 15 = 25$

अतः एकमुश्त कर लगने पर उत्पादन स्तर तथा बाजार मूल्य अपरिवर्तित रहता है किन्तु लाभ कर की मात्रा से कम हो जाता है अर्थात इस स्थिति में उत्पादक को पूरा कर स्वयं वहन करना पडता है।

(2) प्रति इकाई कर– माना प्रति इकाई रू01 कर लग दिया जाये तो लागत फलन $c_t = x^2 + 5x + 5 + x \times 1 = x^2 + 6x + 5$

करोपरान्त लाभ फलन $\pi_t = 21x - 0.6x^2 - x^2 - 6x - 5$

या $\pi_t = -1.6x^2 + 15x - 5$

$$\frac{d\pi_t}{dx} = 0 => -3.2x + 15 = 0$$

या $x = \frac{150}{32} = 4.6875,$

मूल्य $P = 21 - 0.6 \times \frac{150}{32} = \frac{291}{16} = 18.19,$

लाभ $\pi = -1.6 \times (\frac{75}{16})^2 + 15 \times \left(\frac{75}{16}\right) - 5 = 30.1562$

अर्थात उत्पादन घटेग, मूल्य बढेगा तथा लाभ घटेगा।

ध्यान दें फर्म कर का पूरा भार उपभोक्ता पर डालने में सफल नही होती है कर का कितना भार उपभोक्ता पर डाला जा सकता है या माँग की लोच पर निर्भर करता है।

करारोपण से प्राप्त कर आय को अधिकतम करने वाली 'प्रति इकाई कर दर':–

माना कर अधिकतम करने वाली प्रति इकाई कर दर $= t/$इकाई

$$c_t = x^2 + 5x + 5 + tx$$

$$\pi_t = 21x - 0.6x^2 - x^2 - (5 + t)x - 5$$

लाभ अधिकतम होने की आवश्यक शर्त

$$\frac{d\pi_t}{dx} = 0 => -3.2x + 16 - t =$$

$$=> x = \frac{16 - t}{3.2}$$

कर आय

$$T = t.x = \frac{16t - t^2}{3.2}$$

कर आय अधिकतम की आवश्यक शर्त

$$\frac{dT}{dt} = 0 => \frac{1}{3.2} \quad \frac{d}{dt} \; [16t - t^2] = \frac{16 - 2t}{3.2} = 0$$

$$=> t = \frac{16}{2} = 8$$

3.11.4 नति परिवर्तन बिन्दु :

उदाहरण 8:– एक उत्पादक केवल एक ही आगत का प्रयोग करता है और उसका उत्पादन फलन $Q = -8 + 5x + 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$ है; जहाँ xआगत की इकाई तथा

Q उत्पादन स्तर है। आग्त का वह इकाई स्तर ज्ञात कीजिए जिस पर उत्पादन का प्रथम चरण अर्थात उत्पत्ति वृद्धि का नियम समाप्त हो रहा है।

हल– उत्पत्ति वृद्धि का नियम लागू होने पर सीमान्त उत्पत्ति बढती है जिसके कारण उत्पादन फलन x अक्ष के प्रति उत्तल होता है। उत्पत्ति नियम समाप्त होने पर उत्पादन फलन अपनी नति परिवर्तित करके x के प्रति अवतल हो जाता है। अतः उत्पत्ति वृद्धि का नियम नति परिवर्तन बिन्दु तक लागू रहता है। अतः दिये ग्ये उत्पादन फलन का नति परिवर्तन बिन्दु ज्ञात करेगें।

नति परिवर्तन बिन्दु की आवश्यक शर्त –

$$\frac{d^2Q}{dx^2} = 0$$

पहले Q का एक बार x के सापेक्ष अवकलन $\frac{dQ}{dx}$ ज्ञात करेगें।

$$\frac{dQ}{dx} = 5 + 4x - x^2$$

$\frac{dQ}{dx}$ का x के सापेक्ष पुनः अवकलन करने पर

$$\frac{d^2Q}{dx^2} = \frac{d}{dx}\ \{\frac{dQ}{dx}\} = 4 - 2x$$

$$\frac{d^2Q}{dx^2} = 0 \qquad => \ 4 - 2x = 0$$

$$=> x = 2$$

नति परिवर्तन बिन्दु के लिए पर्याप्त शर्त के लिये

$$\frac{d^3Q}{dx^3} \neq 0$$

अब

$$\frac{d^3Q}{dx^3} = 2 \neq 0$$

अतः आग्त इकाई स्तर $x = 2$ पर उत्पादन का प्रथम चरण– उत्पत्ति वृद्धि का नियम समाप्त हो रहा हैं।

3.12 शब्दावली

प्रथम अवकलज– जब किसी दिये हुये फलन को सिर्फ एक बार अवकलित किया जाये तो प्राप्त परिणाम।

सीमान्त– किसी चर की एक अकेली इकाई के द्वारा सकल परिणाम में लाया जाने वाला अन्तर।

चरममान– फलन के ऐसे बिन्दु जो अपने आस–पास के समीपवर्ती बिन्दुओं से उच्चतम तथा निम्नतम हो; इन्हें क्रमशः उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ कहते है। एक ही फलन में एक से अधिक चरममान हो सकते है।

पूर्ण प्रतियोगिता– बाजार की वह दशा जिसमें एक ही वस्तु के असंख्य क्रेता एवं विक्रेता हों जिनका व्यक्तिगत रूप से बाजार की माँग पर कोई प्रभाव न पडता हो तथा जिनका बाजार में प्रवेश या निष्कासन निर्बाध हो।

3.13 सांराश– इस अध्याय के अध्ययन के पश्चात् आप अवकलन एवं इससे जुडे तमाम नियमों यथा दो फलनों के योगा, अन्तर, गुणनफल तथा भाजफल के अवकलन के नियम, श्रंखला नियम इत्यादि तथा उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ नति परिवर्तन बिन्दु आदि की अवधारणाओं से सुपरिचित हो गये है। अवकलन की समझ आपको विभिन्न आंशिक अवधारणाओं जैसे– सीमान्त मान (सीमान्त उपयोग्िता, सीमान्त उत्पादकता, सीमान्त लागत, सीमान्त आय आदि), माँग की लोच, पूर्ति की लोच आदि को समझने में सहायक होगी। फर्म के सन्तुलन का विश्लेषण उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ की सहायता से किया जाता है।

3.14 अभ्यास प्रश्न

(1) रिक्त स्थान को भरिये।

(क) प्रथम अवकलज फलन के .... को व्यक्त करता है। (उभार/ढाल)

(ख) अवकलज फलन के .... मान को दर्शाता है। (सीमान्त/औसत)

(ग) अवकलज फलन में .... को दर्शाता है। (परिवर्तन की मात्रा/परिवर्तन की दर)

(घ) बार–बार अवकलन करने से अवकलज की .... बढती है। (कोटि/घात)

(ङ) उच्चिष्ठ बिन्दु फलन के .... बिन्दुओं में सर्वोच्च होता है। (सभी/आस– पास के)

(च) नति परिवर्तन बिन्दु पर स्पर्श रेखा फलन को .... हैं।

(स्पर्श करती है/दो भागें में बाटती है)

(2) निम्न कथनों में सत्य एवं असत्य को चिह्नित कीजिये।

(क) किसी एक घातीय फलन का प्रथम कोटि का अवकलज एक अचर राशि होती है। (सत्य/असत्य)

(ख) फलन के केवल सतत् भाग पर अवकलन सम्भव हैं। (सत्य/असत्य)

(ग) नति परिवर्तन बिन्दु पर फलन की ढाल स्थिर रहती है। (सत्य/असत्य)

(घ) चरम बिन्दुओं पर फलन की स्पर्श रेखा की ढाल शून्य होती है।(सत्य/असत्य)

(ङ) किसी दिये हुये फलन में एक से अधिक चरम मान प्राप्त हो सकते है। (सत्य/असत्य)

(च) दो फलनों के योगफल का अवकलज इन फलनों के अलग–2 अवकलजों के गुणनफल के बराबर होता है। (सत्य/असत्य)

3.15 अभ्यास प्रश्नों के उत्तर

(1) (क) ढाल, (ख) सीमान्त (ग) परिवर्तन की दर (घ) कोटि (ङ) आस पास के (च) दो भागें में बॅाटती।

(2) (क) सत्य (ख) सत्य (ग) असत्य (घ) सत्य (ङ) सत्य (च) असत्य।

3.16 सहायक ग्रन्थ

1. मिश्र, जे.पी., गणितीय अर्थशास्त्र, सहित्यभवन पब्लिकेशन।

2. *Agarwal, D.R.; Quantitative Methods: Mathematics and Statistics, Vrinda Pub.*

3. अग्रवाल, डी.आर.; गणितीय अर्थशास्त्र, वृन्दा पब्लिकेशन्स।

4. मेहता, बी.सी. एवं मदनानी, जी.एम.के; अर्थशास्त्र में प्रारम्भिक गणित; लक्ष्मीनारायण अग्रवालपब्लिकेशन्स।

5. *Mehta, B.C. and Madnani G.M.K; Mathematics for EconomistsKitab Mahal Publication.*

6. डा0 एस.एन. लाल, डा0 एस.के. चतुर्वेदी एवं डा0 एस. के. लाल; आर्थिक विश्लेषण की तकनीकी; शिव पब्लिकेशन्स।

3.17 सन्दर्भ ग्रन्थ

1. महेश चन्द्र; मेहरोत्रा, प्रकाश नारायण; अर्थशास्त्रीय गणित; उत्तर प्रदेश हिन्दी ग्रंथ अकादमी, लखनऊ।

3. *Monga, G.S.; Mathematics and Statistics for Economists.*

4. *Allen, R.G.D.: Mathematical Analysis for Economics, Macmillan & CO., Ltd.* 1938.

5. *Chiang; Alpha .Co.: Fundamental Methods of Mathematical Economics, McGRAW – HILL Book Company* 1984.

3.18 निबन्धात्मक प्रश्न

(1) निम्न फलनों के प्रथम कोटि के अवकलज ज्ञात कीजिये।

(क) x^7 (ख) $x^{-7/2}$ (ग) $\frac{1}{x^{-\frac{5}{2}}}$ (घ) $4x^2+\frac{2}{x}$ (ङ) $\frac{1}{x}(2x+5x)^{3/2}$

(च) $(x^2+1)(x+3x^2)$ (छ) $\frac{\sqrt{X}}{X-1}$

(2) निम्न फलनों के लिये x के वे मान ज्ञात करें जिन पर फलन के उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान प्राप्त होगे। फलन के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान भी ज्ञात करें।

(क) $y=-x^3+\frac{9}{2}x^2-6x+6$

(ख) $y=\sqrt{x(x^2-1)}$

(ग) $y=4x-\frac{1}{x}$

(3) दिये हुये फलन की वक्रीयता की जाँच कीजिए एवं नति परिवर्तन बिन्दु भी ज्ञात करें। (यदि हो तो)

(क) $y=x^3 2x^2+30$ (ख) $y=-\frac{x^2}{5}+24x$

(ग) $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{x^2}+24x-12$

(4) किसी एकाधिकारी फर्म का माँग फलन $P=20-0.5q$ तथा लागत फलन $c=0.4q^3-1094q^2+32.95q$ है तो फर्म का लाभ अधिकतम करने वाला मूल्य तथा उत्पादन स्तर एवं अधिकतम लाभ ज्ञात कीजिए।

इकाई 4: लघुगुणकीय एवं आंशिक अवकलन

इकाई संरचना

4.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में हमने एक चरीय फलनों के अवकलन का अध्ययन किया है। इस इकाई में हम उसी क्रम को आगे बढ़ाते हुए एक चरीय लघुगुणकीय फलनों के अवकलन की प्रक्रिया व नियमों का अध्ययन करेगें। इसके साथ ही बहुचरीय फलनों के आंशिक व पूर्ण अवकलन, इन फलनों के निरपेक्ष अधिकतम/न्यूनतम, प्रतिबंधित अधिकतम/न्यूनतम तथा एक चर के सापेक्ष फलन अधिकतम तथा दूसरे चर के सापेक्ष न्यूनतम होने जैसी विशिष्ट स्थिति आदि का अध्ययन करेगें।

आंशिक अवकलन की सहायता से एक बहुचरीय फलन पर एक विशिष्ट स्वतंत्र चर (कारक) के पड़ने वाले प्रभावों की गणना की जाती है। अनेक स्वतंत्र चरों में से किसी एक चर का प्रभाव देखने के लिए अन्य सभी स्वतंत्र चरों को स्थिर रखा जाता है। जब सभी स्वतंत्र चर परिवर्तनशील होते हैं तो पूर्ण अवकलन की गणना होती है जो सभी स्वतंत्र चरों के परिवर्तित होने की स्थिति में फलन पर पड़ने वाले कुल प्रभावों को स्पष्ट करता है।

एक बहुचरीय फलन को प्रभावित करने वाले चरों की सीमा का निर्धारण यदि किसी बाह्य कारक द्वारा अथवा बाह्य रूप से हो रहा हो तो प्रतिबंधित अधिकतम/न्यूनतम की सहायता से फलन का सर्वोत्कृष्ट मान ज्ञात किया जा सकता है। प्रस्तुत इकाई में उक्त गणितीय विधियों का अर्थशास्त्र में अनुप्रयोग करके उपभोक्ता व्यवहार, उत्पादन के सिद्धान्त, फर्म के सिद्धान्त आदि की गणितीय आख्या तथा पुष्टि का भी अध्ययन किया जायेगा।

4.2 उद्देश्य

इस इकाई का उद्देश्य विद्यार्थियों को लघुगुणकीय फलनों के अवकलन की प्रक्रिया तथा नियमों से परिचित तथा बहुचरीय फलनों के आंशिक अवकलन तथा पूर्ण अवकलन की अवधारणा, प्रक्रिया तथा नियमों से परिचित कराना है ताकि विद्यार्थियों में अर्थशास्त्र के विभिन्न सिद्धान्तों को वैज्ञानिक विधि से समझने की क्षमता विकसित हो सके। साथ ही विद्यार्थियों में अर्थशास्त्र के अन्तर्गत आने वाली ऐसी समस्याओं का समाधान ढूढ़नें की क्षमता भी विकसित हो; जिन समस्याओं का समाधान उक्त गणितीय विधियों से प्राप्त करना सम्भव है। जो विद्यार्थी गणितीय विधियों में पारंगत हो जाते हैं, अर्थशास्त्र का अध्ययन उनके लिये अत्यन्त सरल बन जाता है।

4.3 लधुगुणकीय फलनों का अवकलन

यदि $y = f(x)$: $y = logx$ तो y का प्रथम सिद्धान्त से अवकलज

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{log_e(x+h) - log_e x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{log_e x\left(1+\frac{h}{x}\right) - log_e x}{h}$$

(चूंकि $\log m.n = logm + logn$)

$$= \lim_{h\to 0} \frac{log_e x + log_e\left(1+\frac{h}{x}\right) - log_e x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{log_e\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left\{\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \frac{h^4}{4x^4} + \ldots..\right\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\ \{\frac{1}{x} - \cancel{\frac{h}{2x^2}} + \frac{h^2}{3x^3} - \frac{h^3}{4x^4} + \ldots..\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \{\frac{1}{x} - \frac{h}{2x^2} + \frac{h^2}{2x^3} - \frac{h^3}{4x^4} + \ldots..\}$$

$$= \frac{1}{x}$$

अतः $\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}\ log_e x = \frac{1}{x}$

4.3.1 चर घातांकी फलनों का अवकलनः

यदि $y = f(x): y = e^x$ तो $\frac{dy}{dx} = e^x$ होगा

चर घातांकी फलन के अवकलन का यह नियम लधुगुणकीय फलन के अवकलन के नियम से भी निर्गमित किया जा सकता है। $y = e^x$ का प्रतिलोम फलन $x = \log y$ होता है।

अतः प्रतिलोम फलन के नियम से $\frac{d}{dx}e^x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{1/y} = y = e^x$.

इसे प्रथम सिद्वान्त द्वारा निम्नवत् प्राप्त किया जा सकता है।

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}e^x = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h}$$

$$= lim_{h\to 0} \frac{e^x\left(1+\frac{h}{1!}+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+\cdots-1\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^x h\left(1+\frac{h}{2!}+\frac{h^2}{3!}+\cdots\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^x\left(1+\frac{h}{2!}+\frac{h^2}{3!}+\cdots\right)}{h}$$

$$= e^x$$

4.3.2 श्रृंखला नियम का उपयोगः किसी भी चर घांताकी फलन का अवकलन श्रृंखला नियम का प्रयोग करके सरलता से किया जा सकता है। यदि

$y = f(x): y = e^z$ जहाँ $z = g(x)$

तो $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dz}e^z . \frac{dz}{dx} = e^z . \frac{dz}{dx}$

उदाहरण– यदि $y = e^{x^3}$ तो $\frac{dy}{dx} = \frac{d \quad e^{x^3}}{d(x^3)} \cdot \frac{d \quad x^3}{dx}$

$$= e^{x^3} . 3x^2 = 3x^2 . e^x$$

इसी प्रकार किसी भी लघुगुणकीय फलन का अवकलन श्रृंखला नियम की सहायता से सरलता से किया जा सकता है।

यदि

$y = f(x): y = log_e z$ जहाँ $z = g(x)$

तो $\frac{dy}{dx} = \frac{log_e z}{dz} . \frac{dz}{dx}$

$$= \frac{1}{z} \, . \frac{dz}{dx}$$

उदाहरणः यदि $y = \log(x^2 + 3x)$ इसका अवकलन करने के लिये मान लिया $z = x^2 + 3x$ तो

$$\frac{dz}{dx} = 2x + 3$$

तथा $y = \log z$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{d}{dz}\log z = \frac{1}{z}$$

अब $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dz}.\log z.\frac{dz}{dx}$

या $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x^2+3x)} \times (2x+3)$ [z एवं $\frac{dz}{dx}$ का मान रखने पर]

यदि आधार कोई अचर a हो :–

$y = f(x): y = a^x$ तो लघुगुणक संक्रिया तथा श्रृंखला नियम का प्रयोग करके हमें प्राप्त होता है–

$$\log y = x$$

$$\frac{dy}{dx} = a^x \, log_e a$$

इसी प्रकार लघुगुणकीय फलनों के सन्दर्भ में यदि–

$y = f(x): y = log_a \, x$ तो

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \, log_e a}$$

उदाहरणः– यदि $y = 7^{4-x}$ तो

$$\frac{dy}{dx} = -(7)^{4-x}.\log 7$$

उदाहरण यदि $y = log4^x$ तो $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \, log_e 4}$

4.4 आंशिक अवकलन

अभी तक हम लोगें ने एक चरीय फलन अर्थात ऐसे फलनों का अध्ययन किया है जो केवल एक स्वतन्त्र चर पर निर्भर करते हैं, फलतः एक ही स्वतन्त्र चर में परिवर्तनों के द्वारा फलन में होने वाले परिवर्तनों की व्याख्या कर पाना सम्भव था। इसीलिये अभी तक हमने अवकलन के जिन नियमों का अध्ययन किया वे एक ही स्वतन्त्र चर वाले फलनों के लिये उपयोगी हैं किन्तु अनेक फलन ऐसे होते हैं जो एक से अधिक स्वतन्त्र चरों पर निर्भर करते हैं; जिन्हें बहुचरीय फलन कहते हैं। जिनके विषय में हम इकाई–2 में अध्ययन कर चुके हैं। ऐसे फलनों में होने वाले परिवर्तन किसी एक या अनेक स्वतन्त्र चरों में होने वाले परिवर्तन के परिणाम होते हैं। किसी एक विशिष्ट स्वतन्त्र चर पर फलन की आश्रितता का आकलन करने के लिये यह आवश्यक होग कि अन्य स्वतन्त्र चरों में उस समय कोई परिवर्तन न हो, अर्थात वे स्थिर रहें, आश्रितता के इस सम्बन्ध का आकलन आंशिक अवकलन के द्वारा किया जाता है क्योंकि अवकलन की यह प्रक्रिया फलन में होने वाले परिवर्तन की आंशिक व्याख्या करती है।

4.4.1 आंशिक अवकलजः– माना कोई फलन $y = f(x_1 x_2 \ldots \ldots x_4)$ जहाँ $x_i(i = 1,2, \ldots . n)$ परस्पर एक दूसरी से स्वतन्त्र चर हैं, अतः यदि केवल स्वतन्त्र चर x_1 में Δx_1 परिवर्तन होता है तो अन्य स्वतन्त्र चरों $x_{2---} x_n$ पर इसका प्रभाव नही पडेग और वे स्थिर रहेगें। तथा इस कारण फलन y में होने वाला परिवर्तन Δy x_1 में हुये परिवर्तन Δx_1 का परिणाम होगा। इन अन्तरों के भाजफल को हम निम्न प्रकार लिख सकते है।

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2 \ldots \ldots . . x_n) - f(x_1 x_2 \ldots \ldots x_n)}{\Delta x_1}$$

यदि Δx_1 की शून्योन्मुखी सीमा लो तो हमें x_1 के सापेक्ष yका आंशिक अवकलज प्राप्त होगा।

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3 \ldots \ldots . . x_n) - f(x_1 x_2 \ldots \ldots x_n)}{\Delta x_1}$$

$$= \frac{\partial y}{\partial x_1}$$

जो x_1 के सापेक्ष y का आंशिक अवकलज है और यह इंगित करता है कि इस समय शेष सभी स्वतन्त्र चर $x_2 \dots \dots x_n$ स्थिर हैं।

इसी प्रकार फलन y का आंशिक अवकलज x_2 या x_3 या $\dots\dots x_n$ के सापेक्ष भी निकाला जा सकता है। सामान्य रूप से हम इसे $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ लिखते हैं जहाँ $i = 1,$ या $2,$ या $3,$ या n है। आंशिक अवकलज की प्रक्रिया को हम निम्न उदाहरण से समझ सकते है।

उदाहरणः– $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4): y = x_1^3 x_4 + 2x_2 \quad x_3 + \quad x_1^2\, x_2 x_3 x_4$ का x_1, x_2, x_3, x_4 के सापेक्ष आंशिक अवकलन कीजिए।

हलः– आंशिक अवकलज ज्ञात करते समय जिस स्वतन्त्र चर के सापेक्ष अवकलन करना है उसे छोड़कर शेष सभी स्वतन्त्र चर को स्थिरांक मान कर व्यवहार करते है; तथा अवकलन की शेष प्रक्रिया एक चरीय अवकलनों के जैसी होती है।

दिये हुये फलन का x_1 के सापेक्ष आंशिक अवकलज– यहाँ अन्य स्वतन्त्र चरों x_2, x_3, x_4 को स्थिरांक मान लिया जायेगा।

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 3x_1^2 x_4 + 0 + 2\, x_1 . x_2 . x_3 . x_4$$

दिये गये फलन का x_2 के सापेक्ष आंशिक अवकलज–यहाँ x_1, x_3, x_4 को स्थिरांक मान लिया जायेगा।

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 0 + 2x_3 + x_1^2 x_3\, x_4$$

दिये ग्ये फलन का x_3 के सापेक्ष आंशिक अवकलज– यहाँ $x_1 x_2\, x_4$ को स्थिरांक मान लिया जायेगा।

$$\frac{\partial y}{\partial x_3} = 0 + 2x_2 + x_1^2 x_2\, x_4$$

दिये गये फलन का x_4 के सापेक्ष आंशिक अवकलज– यहाँ $x_1 x_2\, x_3$ को स्थिरांक मान लिया जायेगा।

$$\frac{\partial y}{\partial x_4} = x_1^3 + 0 + x_1^2\, x_2\, x_3$$

4.4.2 उच्च कोटि के आंशिक अवकलजः– दो या दो से अधिक स्वतन्त्र चरों के किसी भी फलन के लिये द्वितीय या उच्चतर कोटि के आंशिक अवकलज निकाले जा सकते है। उदाहरण के लिये यदि कोई फलन $z = f\left(x, y\right)$ दो स्वतन्त्र चरों का फलन है तो हम अध्ययन कर चुके है कि इसके प्रथम कोटि के दो आंशिक अवकलज ($\frac{\partial z}{\partial x}$ या $z_{(x)}$ तथा $\frac{\partial z}{\partial y}$ या $z_{(y)}$) प्राप्त होते हैं। यदि इन आंशिक अवकलजों का पुनः आंशिक अवकलन कर दिया जाये तो द्वितीय कोटि के अवकलज प्राप्त होगे, जो निम्नवत् होगे।

(क) $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

(ख) $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

(ग) $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

(घ) $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

यहाँ यह ध्यान दें कि ख और घ त्रियक आंशिक अवकलज कहे जाते हैं तथा इनमें 'हर' में कम बदलने से परिणाम अपरिवर्तित रहता है। अर्थात

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

दो से अधिक चरों वाले फलनों के द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलज भी इसी प्रकार प्राप्त किये जा सकते है।

द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलजों का पुनः आंशिक अवकलज करने पर तृतीय कोटि के आंशिक अवकलज तथा इसी प्रकार उच्चतर कोटि के आंशिक अवकलज प्राप्त किये जा सकते हैं।

उदाहरणः– यदि $z = f(x, y): z = ax^2 + 2hxy + by^2$

तो $\frac{\partial z}{\partial x} = 2ax + 2hy + 0$ तथा $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2a$

$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 2hx + 2by$ तथा $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2b$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2ax + 2hy) = 2h$$

या $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2h$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2hx + 2by) = 2h$$

या $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2h$

स्पष्ट है कि $\frac{\partial^2 z}{\partial xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

4.4.3 द्विचरीय फलनों के उच्चिष्ठ एवं निम्ननिष्ठ :–

द्विचरीय फलनों के उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ मानो के लिये आवश्यक शर्ते निम्न तालिका में दी है।

शर्ते	फलन $z = f(x, y)$ के	
	उच्चिष्ठ	निम्निष्ठ
आवश्यक	$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ तथा $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial z}{\partial x} 0 = 0$ तथा $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

पर्याप्त शर्त	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0$ तथा $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} < 0$	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$ तथा $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > 0$
	और $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > (\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y})^2$	और $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} . \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > (\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y})^2$

उदाहरणः– यदि $z = f(x, y): z = x^2 - xy + y^2$ हो तो z के उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ बिन्दु ज्ञात कीजिए।

हल– $z_{(x)} = 2x - y, \quad z_{(xx)} = 2$

$$z_{(y)} = -x + 2y, \quad z_{(yy)} = 2$$

$$z_{xy} = -1$$

उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ के लिये आवश्यक शर्त–

$$z_x = z_y = 0$$

$2x - y = 0$ तथा $-x - 2y = 0,$ को हल करने पर $x = 0$ तथा $y = 0$

फलतः $z = 0,$ अर्थात मूल बिन्दु।

पर्याप्त शर्त

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} => 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 > 0$$

तथा $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} . \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \times 2 = 4$

और $\{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\}^2 = 1$

अतः $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} . \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > \{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\}^2$ अतः फलन में एक ही बिन्दु निम्निष्ठ है।

4.5 समांग फलन

किसी फलन को r घात का समांग फलन कहा जायेगा यदि फलन के समस्त स्वतन्त्र चरों में j का गुणा करने पर फलन का मान j^r गुना परिवर्तित हो जाये। अर्थात

यदि $f(jx_1, jx_2, \dots \dots jx_n) = j^r f(x_1, x_2, \dots \dots x_n)$

तो फलन $f(\,x_1, x_2, \dots \dots x_n)$ r घात का समांग फलन है।

उदाहरणः– फलन $z = f(x,y)$: $z = \frac{ax^2+2hxy+by^2}{(x-y)}$ की समांगता का परीक्षण कीजिए तथा समांगता की कोटि बताइये।

हल– $f(jx, jy) = \frac{a(jx)^2+2h(jx)(jy)+b(jy)^2}{(jx-jy)}$

$$= \frac{j^2\ (x^2 + 2hxy + by^2)}{j(x-y)}$$

$$= \frac{j\ (x^2 + 2hxy + by^2)}{(x-y)}$$

$$= j\ f\ (x,y)$$

अतः दिया गया फलन समांगा है तथा समांगता की कोटि '1' है।

4.5.1 रैखिक समांग फलनों के गुणः– एक घात के समांगा फलन को रैखिक समांग फलन कहते है। जिसके गुण निम्नवत् है।

(i) रैखिक समांगा फलन $z = f(x,y)$ को $z = x.g(\frac{y}{x})$

अथवा $z = y.h(\frac{x}{y})$ भी लिख सकते है जहॉ g तथा h एक चरीय फलन है।

चूँकि $f(kx, ky) = \ kf(x,y)$

यदि $k = \frac{1}{x}$ लें तो

$$f\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y\right) = \frac{1}{x}.f(x,y)$$

या $f\left(1,\ \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}.f(x,y)$

या $g\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}.f(x,y)$

या $f(x,y) = x.g(\frac{y}{x})$

इसी प्रकार हम दिखा सकते है कि $f(x,y) = y.h\left(\frac{x}{y}\right)$

(ii) रैखिक समांग फलन $z = f(x,y)$ के आंशिक अवकलज $\frac{\delta z}{\delta x}$ तथा $\frac{\delta z}{\delta y}$ स्वतन्त्र चरों (x,y) के अनुपात के फलन होते हैं।

$$z = f(x,y) = x.g(\frac{y}{x})$$

$$\frac{\delta z}{\delta x} = x.\frac{\delta}{\delta x}\left[g\left(\frac{y}{x}\right)\right] + g\left(\frac{y}{x}\right).$$

$= -\left(\frac{y}{x}\right)g'\left(\frac{y}{x}\right) + g(\frac{y}{x})$ जो कि $(\frac{y}{x})$ का फलन है।

इसी प्रकार $\frac{\delta z}{\delta y} = g'\left(\frac{y}{x}\right)$ जो y/x का एक फलन है।

(iii) रैखिक समांग फलन के आंशिक अवकलजों में संगत चर से गुणा कर के योगा करने पर वही फलन प्राप्त होता है। अर्थात

$$z = f(x,y) = x\,.\ \frac{\delta z}{\delta x} + y\,.\ \frac{\delta z}{\delta y}$$

जिसे आयलर प्रमेय या मांग प्रमेय भी कहते हैं।

गुण i तथा गुण ii से

$z = x.g(\frac{y}{x})$ तथा $\frac{\delta z}{\delta x} = -\frac{y}{x}\ g'\left(\frac{y}{x}\right) + g\ (\frac{y}{x})$

एवं $\frac{\delta z}{\delta y} = g'\left(\frac{y}{x}\right)$ तो

$$x\ \frac{\delta z}{\delta x} + y.\frac{\delta z}{\delta y} = x.\left\{-\frac{y}{x}\ g'\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)\right\} + y.g'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \ -y\,g^{'}\left(\frac{y}{x}\right) + x.g\left(\frac{y}{x}\right) + yg'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= z$$

4.6 पूर्ण अवकलन

जब किसी बहुचरीय फलन के सभी चर एक ही समय में परिवर्तनशील हों तो समस्त स्वतन्त्र चरों में परिवर्तन के परिणाम स्वरूप फलन में हाने वाले परिवर्तन को पूर्ण अवकलन

द्वारा ज्ञात किया जाता है। यदि कोई फलन $z = f(x, y)$ में x तथा y एक साथ परिवर्तित हो तो z में परिवर्तन–

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}. dx + \frac{\partial z}{\partial y}. dy$$

जो फलन z का पूर्ण अवकलन हैं।

फलनों के योगा, अन्तर, गुणनफल तथा भाजफल से प्राप्त फलनों के फलन का पूर्ण अवकलन ऐसे सन्दर्भो में सामान्य अवकलनों के नियमों के अनुरूप ही किया जाता है।

उदाहरणः– यदि $z = (x^2 + y)(2x - y^2)$ तो

$$dz = (2x - y^2). d(x^2 + y) + (x^2 + y)d(2x - y^2)$$

$$= (2x - y^2)(2xdx + dy) + (x^2 + y)(2. dx - 2ydy)$$

$$=4x^2\, dx - 2xy^2dx + 2xdy - y^2dy + 2x^2dx + 2ydx - 2x^2ydy - 2y^2dy$$

$$= (6x^2 + 2y - 2xy^2)dx + (2x - 3y^2 - 2x^2y)dy$$.............

4.7 बन्धित अतिमान (उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ)

पूर्व में हम फलनों के स्वतन्त्र अतिमानों (उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ) की गणना विधि का अध्ययन कर चुके हैं किन्तु अनेक सन्दर्भो में किसी फलन को एक दी हुई शर्त या बन्धन से बंध कर उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान धारण करने की स्थिति होती है। ऐसे सशर्त या बन्धित उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ को ज्ञात करने की विधि को 'लेग्रैन्ज' ने विकसित किया था। इस विधि को निम्न उदाहरण से समझ सकते हैं।

उदाहरणः– यदि फलन $y = f(x_1\, x_2)$ एवं प्रतिबन्ध $z = g(x_1\, x_2){:}\, a_1\, x_1 + a_2\, x_2 = c$ है तो इस प्रतिबन्ध से बन्धित करके फलन के उच्चिष्ठ/ निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिये।

हलः दिये हुये फलन के प्रतिबन्धित अधिकतम हेतु लैंगैन्ज फलन

$$v = f\ (x_1\, x_2) + \lambda(c - a_1\, x_1 - a_2\, x_2)$$

प्रतिबन्धित उच्चिष्ठ/ निम्निष्ठ की आवश्यक शर्ते

(i) $\frac{\delta v}{\delta x_1} = 0 => \ f_1 - \lambda a_1 = 0$ या $\lambda = \frac{f_1}{a_1}$

(ii) $\frac{\delta v}{\delta x_2} = 0 => \ f_2 - \lambda a_2 = 0$ या $\lambda = \frac{f_2}{a_2}$

(iii) $\frac{\delta v}{\delta \lambda} = 0 => \quad c - a_1 x_1 - a_2 x_2 = 0$

पर्याप्त शर्ते

(a) उच्चिष्ठ हेतु सीमांकित हेसियन सारणिक $\overline{H} < 0$

(B) निम्निष्ठ हेतु सीमांकित हेसियन सारणिक $\overline{H} > 0$

जहॉ

$$I\overline{H}I = \begin{vmatrix} 0 & -z_1 & -z_2 \\ -z & v_{11} & v_{12} \\ -z_2 & v_{21} & v_{22} \end{vmatrix}$$

उपरोक्त उदाहरण में $z_1 = -1$

$z_2 = -2$

$v_{11} = 2, \quad v_{12} = -1, \quad v_{21} = -1, \quad v_{22} = 0$

अतः सारणिक $\overline{H}$

$$I\overline{H}I = \begin{vmatrix} 0 & -(-1) & -(-2) \\ -(-1) & 2 & -1 \\ -(-2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0.\{2x0 - (-1)(-1)\} - 10\{1x0 - (-1)(2)\} + 2\{(1)(-1) - (2)(2)\}$$

$$= 0 - 1(2) + 2(-1 - 4)$$

$$= -2 - 10 \qquad = -12 < 0$$

अतः $x_1 = \frac{1}{2}$ तथा $x_2 = \frac{5}{4}$ पर फलन दी गई शर्त से बन्धित होकर उच्चिष्ठ मान देगा।

उदाहरणः– यदि फलन $y = f(x_1x_2): y = x_1^2x_1x_2$ तथा शर्त $z = g(x_1x_2): x_1 + 2x_2 = 3.$ तो इस शर्त या बन्धन से बन्ध कर फलन के अतिमान ज्ञात करें।

हल– लैग्रेन्ज फलन $v =$ दिया हुआ फलन $+\lambda$ (दी हुई शर्त)

यहाँ $v = x_1^2 - x_1x_2 + \lambda(3 - x_1 - 2x_2)$

अतिमानों के लिये आवश्यक शर्ते

$$\frac{\delta v}{\delta x_1} = 0 => 2x_1 - x_2 - \lambda = 0$$

या $$2x_1 - x_2 = \lambda - - - - - - - - - (i)$$

$$\frac{\delta v}{\delta x_2} = 0 \;=>\; -x_1 - 2\,\lambda = 0$$

या $$\frac{-x_1}{2} = \lambda \text{ \_\_\_\_\_\_\_\_\_ } (ii)$$

$$\frac{\delta v}{\delta \lambda} = 0 => 3 - \; x_1 - 2x_2 = 0$$

या $$3 = x_1 + 2x_2 \text{ \_\_\_\_\_\_\_\_\_ } (iii)$$

(i) तथा (ii) से

$$2x_1 - x_2 = \frac{-x_1}{2}$$

या

$$\boxed{\frac{5x_1}{2} = x_2}$$

x_2 का मान (111) में रखने पर

$$3 = x_1 + 2\ (\frac{5x_1}{2})$$

या $6x_1 = 3$

$$x_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\ .$$

अतः $x_2 = \frac{5\frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}\ .$

पर्याप्त शर्त या द्वितीय कोटि की शर्त

ऐसे सन्दर्भो में यदि हेसियन सारणिक $(\bar{H})$ का < 0 तो फलन का मान उच्चिष्ठ होग और यदि $\bar{H} > 0$ तो फलन का मान निम्निष्ठ होगा।

4.8 आर्थिक अनुप्रयोग

आंशिक अवकलन की सहायता से उपभोक्ता का व्यवहार, उत्पादक का व्यवहार, अल्पाधिकार, विभेदात्मक एकाधिकार, आडी मॉग लोच इत्यादि का अध्ययन किया जा सकता है।

4.8.1 आडी मॉग लोचः

उदाहरणः– वस्तु x का मांग फलन $Q_x = 2 - 0.3p_x + 0.25p_y$ हो तो $p_x = 2$ तथा $p_y = 4$ पर y के मूल्य के सापेक्ष x की आडी मांग की लोच ज्ञात कीजिए।

हलः– y के मूल्य के सापेक्ष x की आडी मांगा की लोच

$$e_{xy} = \frac{\delta Q_X}{\delta Q_y}\ x\ \frac{p_y}{p_x}$$

मांगा समीकरण में p_x एवं p_y के मान रखने पर

$$Q_x = 2 - 0.3(2) + 0.25(4)$$
$$= 2 - 0.6 + 1 = 2.4$$

तथा $\frac{\delta Q_X}{\delta Q_y} = \frac{\delta}{\delta Q_y}\left\{2 - 0.3\, p_x + 0.25 p_y\right\} 0.25.$

$$e_{xy} = \quad 0.25 \times \frac{4}{2.4.6} = 0.417$$

नोटः आडी मांगा लोच धनात्मक होने पर वस्तुएं स्थानापन्न होती हैं और ऋणात्मक होने पर पूरक होती है।

4.8.2 उपभोक्ता व्यवहारः—

उदाहरणः— उपयोग्िता फलन $U = xy$ के लिये x और y के लिये सीमान्त उपयोगिता ज्ञात कीजिए।

हलः

$MU_x = \frac{\delta U}{\delta x} = Y$ तथा $MU_x = \frac{\delta U}{\delta y} = x$

उदाहरणः— उपभोक्ता फलन $U = x^2 + 5xy + 2y^2$ के लिये सीमान्त प्रतिस्थापन दर फलन ज्ञात कीजिए तथा $x = 3$ एवं $y = 2$ पर सीमान्त प्रतिस्थापन की दर ज्ञात कीजिए।

हलः दिया है $U = x^2 + 5xy + 2y^2$

तटस्थता वक्र के एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु पर जाने में कुल उपयोगिता में परिवर्तन $dU = 0$

$$dU = \frac{\delta U}{\delta x}\,.dx + \frac{\delta U}{\delta y}\,.dy$$

अब $\frac{\delta U}{\delta x} = 2x + 5y$

तथा $\frac{\delta U}{\delta y} = 5x + 4y$

अतः $dU = (2x + 5y).dx + (5x + 4y).dy$

या $o = (2x + 5).dx + (5x + 4y).dy$

या $\frac{dy}{dx} = -\frac{(2x+5y)}{(5x+4y)}$

अब $x = 3$ एवं $y = 2$ पर $\frac{dy}{dx} = -\frac{(2.3+5.2)}{5.3+4.2} = -\frac{6+10}{15+8}$

$$= -\frac{16}{32}$$

उदाहरणः यदि उपभोक्ता का उपयोगिता फलन $U = x^2 + 3xy$ हो तथा वस्तु x की कीमत $p_x = 4$, वस्तु y की कीमत $p_y = 5$

और उसकी आय 140 हो तो x तथा y की वह मात्रा ज्ञात कीजिए जिस पर उपभोक्ता की संतुष्टि अधिकतम हो।

हलः दिया है $p_x = 4$, $p_y = 5$ तथा आय $I = 140$

अतः प्रतिबन्धन फलन होगा– $4x + 5y = 140$

दिये हुये उपयोगिता फलन $U = x^2 + 3xy$ को इस प्रतिबन्ध से बन्घ कर अधिकतम करने हेतु लैग्रेन्ज फलन–

$$v = x^2 + 3xy + \lambda(140 - 4x - 5y)$$

इसके अधिकतमीकरण हेतु आवश्यक शर्ते

(क) $\frac{\delta v}{\delta x} = 0 => 2x + 3y - 4\lambda = 0$

या $\frac{2x+3y}{4} = \lambda - - - - - - - - - - - (i)$

(ख) $\frac{\delta v}{\delta y} = 0 => 3x - 5\,\lambda = 0$

या $\frac{3x}{5} = \lambda - - - - - - - - - - - (ii)$

समीकरण (i) एवं (ii) से

$$\frac{2x + 3y}{4} = \frac{3x}{5}$$

या $10x + 15y = 12x$

या $-2x = -15y$

या $$\boxed{x = \frac{15}{2}y}$$

(ग) $\frac{\delta v}{\delta \lambda} =$ $0 => 140 = 4x + 5y - -(iii)$

समीकरण– (iii) में $x = \frac{15}{2}y$ रखने पर $140 = 4^2.\frac{15}{2}y + 5y$

$$35y = 140$$

$$y = \frac{140}{35} = 4$$

तथा $x = \frac{15}{2}.4 = .30$

अतः $x = 30$ तथा $y = 4$

सन्तुष्टि अधिकतमीकरण हेतु द्वितीय क्रम की शर्त $I\overline{H}I < 0$ होनी चाहिए। इसके लिये

$$\frac{\delta^2 v}{\delta x^2} = 2, \quad \frac{\delta^2 v}{\delta y \delta x} = 3$$

$$\frac{\delta^2 v}{\delta y^2} = 2, \quad \frac{\delta^2 v}{\delta x \delta y} = 3$$

अतः

$$I\overline{H}I = \begin{vmatrix} 0 & -(-4) & -(-5) \\ -(-4) & 2 & 3 \\ -(-5) & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 4(-15) - 5(12 - 10)$$

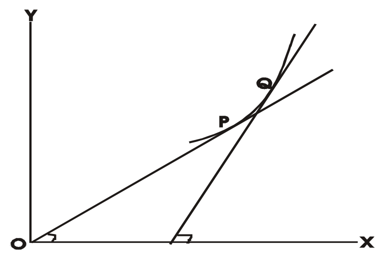
अतः $x = 30$ तथा $y = 4$ पर

$-60 - 10 = -70 < 0$ दी गयी आय सीमा से प्रतिबन्धित होकर उपभोक्ता की संतुष्टि अधिकतम होगी।

4.8.3 वक्र के नतोदर/उन्नतोदर होने की शर्ते

नतोदर/उन्नतोदर होने की शर्ते

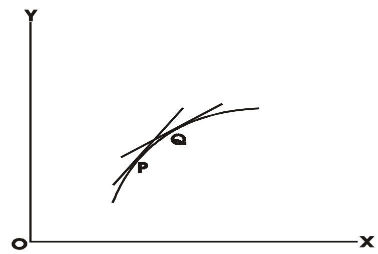
(क) X- अक्ष के प्रति उन्नतोदर



आवश्यक शर्त $\frac{dy}{dx} > 0$

पर्याप्त शर्त $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

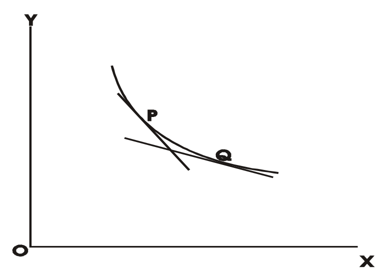
(ख) X- अक्ष के प्रति नतोदर



आवश्यक शर्त $\frac{dy}{dx} > 0$

पर्याप्त शर्त $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

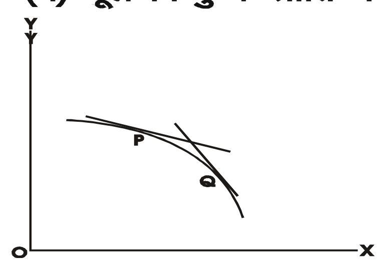
(ग) मूल बिन्दु के प्राति उन्नतोदर



आवश्यक शर्त $\frac{dy}{dx} < 0$

पर्याप्त शर्त $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

(घ) मूल बिन्दु के प्राति नतोदर



आवश्यक शर्त $\frac{dy}{dx} < 0$

पर्याप्त शर्त $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

पुनः समीकरण (i) तथा (ii) से

$$\frac{2x+3y}{4}=\frac{3x}{5}$$

या

$$\frac{2x+3y}{3x}=\frac{4}{5}$$

या

$$\boxed{MRS_{xy}=\frac{(MU_X)}{MU_Y}=\frac{{\partial U}/{\partial x}}{{\partial U}/{\partial y}}=\frac{P_X}{P_Y}}$$

उदाहरणः फलन $z=f(x,y): x^2y^2=c,$ जहाँ $x,y>0$ तथा c अचर है। का परीक्षण कीजिए कि क्या यह फलन तटस्थता वक्र हो सकता है?

हलः यहाँ $y^2=c-x^2$

$$2y\frac{dy}{dx}=0-2x$$

या $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}<0$

तथा $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{y-x\,.\,\frac{dy}{dx}}{y^2}=-\frac{y-x\,.\,\frac{-x}{y}}{y^2}$

$$=-\frac{y^2+x^2}{y^3}=\frac{c}{y^3}<0$$

अर्थात दिया ग्या फलन मूल बिन्दु के प्रति नतोदर है अतः दिया गया फलन तटस्थता वक्र नहीं हो सकता है।

4.8.4 उत्पादन का सिद्वान्तः– आगतों की सीमान्त उत्पादकता,

(क) उत्पादन का सन्तुलन, सीमान्त तकनीकी प्रतिस्थापन दर, तथा समोत्पाद वक्र की मूल बिन्दु के प्रति उन्नतोदरता आदि ठीक इसी प्रकार ज्ञात की जाती है जैसे उपभोक्ता व्यवहार में अध्ययन किया हैं।

(ख) उत्पादन की लोचः यदि उत्पादन की मात्रा $q = f(L, K)$ जहाँ L श्रम तथा k पूँजी की मात्रा है तो

श्रम के सापेक्ष उत्पादन लोच $= \frac{\partial q}{\partial L} . \frac{L}{q}$ या $\frac{\frac{\partial q}{\partial L}}{\frac{q}{L}}$ या $\frac{MP_L}{AP_L}$

पूँजी के सापेक्ष उत्पादन लोच $= \frac{\partial q}{\partial k} . \frac{k}{q}$ या $\frac{\frac{\partial q}{\partial k}}{\frac{q}{k}}$ या $\frac{MP_k}{AP_k}$

(ग) कॉब–डगलस उत्पादन फलन :–

(i) $q = \frac{f(L,K)}{q} = AL^{\propto}k^{\beta}$ एक समांग उत्पादन फलन होता है जिसकी समांगता की कोटि $(\propto +\beta)$ होती है। [विद्यार्थी इसका सत्यापन स्वयं करें]

(ii) यदि $\propto +\beta > 1$ तो 'पैमाने का वर्धमान प्रतिफल'; यदि $\propto +\beta = 1$ तो 'पैमान का स्थिर प्रतिफल' तथा यदि $\propto +\beta < 1$ तो पैमाने का ह्रासमान प्रतिफल प्राप्त होता है। [विद्यार्थी स्वयं परीक्षण करें]

(iii) कॉब–डगलस उत्पादन फलन से प्राप्त समोत्पाद सदैव मूल बिन्दु के प्रति उन्नतोदर होते है।

$q = AL^{\propto}\ k^{\beta}$

समोत्पादक वक्र के सभी बिन्दुओं पर उत्पादन स्तर समान होता है। अतः $dq = \frac{\partial q}{\partial L}.dL + \frac{\partial q}{\partial K}.dK = 0$

या $A.k^{\beta}.\propto L^{1-\propto}dL + A.L^{\propto}\beta k^{\beta-1}dk = 0$

या $\frac{dK}{dL} = -\frac{\propto K}{\beta L} < 0\ [\because \propto, \beta, K, L > 0]$

तथा $\frac{d^2K}{dL^2} = \frac{d}{dL}\left[-\frac{\propto K}{\beta L}\right] = -\frac{\propto}{\beta}.\frac{d}{dL}\left(\frac{K}{L}\right) = \left(-\frac{\propto}{\beta}\right)\left(L.\frac{dK}{dL} - K\right)$

$$= \frac{\left(-\frac{\propto}{\beta}\right)\left\{L.\left(-\frac{\propto K}{\beta L}\right) - K\right\}}{L^2}$$

$$= \frac{-\left(\frac{\propto}{\beta}\right)\left\{-\left(\frac{\propto}{\beta}+1\right)K\right\}}{L^2} > 0$$

अतः काब डगलस से प्राप्त समोत्पादक वक्र मूल बिन्दु के प्रति सदैव उन्नतोदर होते है।

नोटः— रिज रेखायें समोत्पाद वक्रों के उस भाग को रेखांकित करती है जो मूल बिन्दु के प्रति उन्नतोदर होता है। अर्थात इसके किसी भी बिन्दु पर उत्पादन तकनीकी सीमा के अन्दर होगा।

(iv) इस फलन की सीमान्त उत्पादकतायें $MP_L = \frac{\propto q}{L}$ तथा $MP_K = \frac{\beta q}{K}$ एवं उत्पादन लोंच श्रम के सापेक्ष $=\propto$ तथा पूँजी के सापेक्ष $= \beta$ होती है। [विद्यार्थी इसका सत्यापन स्वयं करें]

(v) कॉब–डगलस उत्पादन फलन में जब $\propto + \beta = 1$ होता है तो यह एक रैखिक समांग फलन होता है और योग प्रमेय का पालन करता है; अर्थात् $\frac{\partial q}{\partial L}.L + \frac{\partial q}{\partial K}.K = q$ [विद्यार्थी स्वयं परीक्षण करें] जो प्रतिष्ठित अर्थशास्त्र क वितरण सिद्वान्त की पुष्टि करता है, जिसके अनुसार उत्पादन के कारणों को उनकी सीमांत उत्पादकता के अनुसार पारितोषिक बॉटने से सम्पूर्ण उत्पादन वितरित हो जाता है।

(vi) प्रातिस्थापन की लोच और कॉब–डगलस उत्पादन फलन

प्रातिस्थापन की लोच $\delta = \frac{d(\frac{K}{L})/(\frac{K}{L})}{d(\frac{P_L}{P_K})/(\frac{P_L}{P_K})} = \frac{d(\frac{K}{L})/(\frac{K}{L})}{d(MRTS)/MRTS}$

$\because$ सन्तुलन $MRTS = \frac{P_L}{P_K}$ तथा $MRTS = \frac{MP_L}{MP_K}$

अतः $\propto = \frac{d(\frac{K}{L})/\ (\frac{K}{L})}{d(\frac{MP_L}{MP_K})/(\frac{MP_L}{MP_K})}$

अब$MP_L = \frac{\propto q}{L}$ तथा $MP_K = \frac{\beta q}{K}$ प्रतिस्थापित करने पर

$$\delta = \frac{d(\frac{K}{L})/(\frac{K}{L})}{d(\frac{\propto \frac{q}{L}}{\frac{\beta q}{K}})/(\frac{\propto \frac{q}{L}}{\frac{\beta q}{K}})}$$

या

$$\delta = \frac{d(\frac{K}{L})/(\frac{K}{L})}{\propto/\beta. d(\frac{K}{L})/\propto/\beta. (\frac{K}{L})}$$

$$= 1$$

कॉब–डगलस उत्पादन फलन के लिये प्रतिस्थापन की लोच सदैव $'1'$ होती है।

(vii) कॉब–डगलस उत्पादन फलन का विस्तार पथ एक सीधी रेखा होता हैं।

विस्तार पथ सीधी रेखा होने के लिए (संकेत $q = QL^{\propto}K^{\beta}$ और लागत रेखा $P_L.L + P_K.K = C$) और उत्पादन के संतुलन हेतु लागत प्रतिबन्धित उत्पादन अधिकतमीकरण की दृष्टि से लैग्रेन्ज फलन $v = QL^{\propto}K^{\beta} + \lambda(c - P_L.L + P_K.K)$

पर आवश्यक शर्तो के द्वारा $\frac{\propto Q}{L.P_L} = \frac{\beta Q}{K.P_K}$

$\frac{K}{K} = \frac{\beta P_L}{\propto P_K} =$ अचर

अतः कॉब–डगलस उत्पादन फलन का विस्तार पथ एक सीधी रेखा होगा क्योंकि आग्तों का अनुपात स्थिर बना रहता है।

4.8.5 विभेदात्मक एकाधिकारः– एक विभेदात्मक एकाधिकारी का लागत फलन $c = f(q)$ जो q_i मात्रा P_i मूल्य पर विक्रय करता है जहॉ $i = 1,2,3, - - - - n$ बाजारों की संख्या है।

अतः उत्पादन $q = \varepsilon q_i$

तथा $R = \varepsilon R_i = \varepsilon P_i\, q_i$

लाभ $(\pi) =$ आय $(R) -$ लागत (c)

कुल लाभ अधिकतम होने की आवश्यक शर्ते

$$\frac{\delta\pi}{\delta q_i} = 0 => \frac{\delta}{\delta q_i}(\varepsilon R_i) - \frac{\delta}{\delta q_i} - (c).\frac{\delta q}{\delta q_i} = 0$$

$$=> MR_i - MC = 0$$

$$=> MR_i = MC$$

अर्थात $MR_i = MR_2 = ---- MR_n = MC$

एक एकाधिकारी के लिए भारत में उसके उत्पादन x के लिये मांग फलन $P_1 = 10 - 0.5q_1$ तथा नेपाल में उसी उत्पादन के लिए मांग फलन $P_2 = 7 - q_2$ है, जबकि x की उत्पादन लागत प्रति इकाई 2 है तथा स्थिर लागत 100 है तो संतुलन में कुल उत्पादन भारत व नेपाल में विक्रय मूल्य तथा कुल लाभ की गणना कीजिए।

हलः कुल आय = भारत में आय+नेपाल में आय

या $R = (10 - 0.5q_1)q_1 + (7 - q_2)q_2 = 10q_1 - 0.5q_1^2 + 7q_2 - q_2^2$

लाग्त फलन $c = 200 + 2q$ जहॉ $q = q_1 + q_2$

लाभ $\pi = R - C$

$= 10q_1 - 0.5q_1^2 + 7q_2 - q_2^2 - 200 - 2(q_1 + q_2)$

लाभ अधिकतमीकरण हेतु आवश्यक शर्त

$$\frac{\delta\pi}{\delta q_1} = 0 => 7 - 2q_2 - 2 = 0$$

$$q_2 = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$q = q_1 + q_2 = 8 + 2.5 = 10.5$$

$$P_1 = 10 - 0.5(10)$$

$$= 10 - 4 = 6$$

$$P_2 = 7 - 2.5 = 4.5$$

लाभ $\pi = 6x8 + 4.5 \times 2.5 - (20 + 2 \times 10.5)$

$$= 48 + 11.25 - 41$$

$= 18.25$

4.8.6 अल्पाधिकारः– अल्पाधिकारी बाजार में मांग फलन $P = f(q)$ तथा अल्पाधिकारियों के लागत फलन $c_i = f_i(q_i)$

जहाॅ $i = 1,2,3, - - - n < 10$ है तो अल्पाधिकारी बाजार में दो स्थितियाॅ हो सकती हैः

(i) जब एकाधिकारी स्वतंत्र रूप से व्यवहार करते है अर्थात दूसरों के क्रिया कलाप को नजर अंदाज करते है। ऐसे में प्रत्येक अल्पाधिकारी स्वतन्त्र रूप से अपने लाभ को अधिकतम करता है, अर्थात संतुलन की आवश्यक शर्त पर $\frac{\delta \pi_1}{\delta q_i} = 0$

$\frac{\delta .}{q_i} = (R_i - C_i) = 0$ (जहाॅ $R_i = i$ वें अल्पाधिकारी की कुल आय

$= P. q_i$½

$=> \ MR_i = MC_i$

तथा पर्याप्त शर्त

$\frac{\delta^2 \pi}{\delta_i^2} < 0 => \frac{\delta}{q_i} \ (MR_i - MC_i) < 0$

$=> \ \frac{\delta MR_i}{\delta q_i} < \frac{\delta}{q_i} \ MC_i$

(ii) जब अल्पाधिकारी संन्धि कर ले– ऐसी स्थिति में सभी अल्पाधिकारी मिलकर उद्योग के कुल लाभ को अधिकतम करेंगे जिसके लिए उद्योग के कुल लाभ को प्रत्येक अल्पाधिकारी के उत्पादन के सापेक्ष अधिकतम होना चाहिये। ऐसी स्थिति में संतुलन की आवश्यक शर्त $\frac{\delta \pi}{\delta q_i} = 0 => \frac{\delta}{q_i} (R - \sum c_i)$

(जहाॅ $R = P. q$ तथा $q = \sum q_i$)

$$=> \frac{\delta}{q_i} \ R \ \frac{d}{q} \ R. \frac{dq}{\partial q_i} - \frac{\delta}{q_i} \ \sum c_i = 0)$$

$$=> MR - MC_i = 0$$

$$=> MR = MC_1 = MC_2 = - - - - MC_n; n < 10$$

पर्याप्त शर्त $\frac{\delta^2\pi}{\delta_i^2} < 0$

$$=> \frac{\delta}{q_i}(MR - MC_i) < 0$$

$$=> \frac{\delta}{q_i}\ MR < \frac{\delta}{q_i} MC_i$$

उदाहरणः– एक द्वयाधिकारी बाजार का माँग फलन $p = 15 - 0.5q$ तथा दोनो फर्मो के लागत फलन क्रमशः $c_1 = 1 + 0.55q_1^2$; तथा $c_2 = 1.5 + 0.75q_2^2$ हैं संतुलन की स्थिति में फर्मो के उत्पादन स्तर तथा लाभ ज्ञात कीजिए। यदि (I) फर्मे स्वतंत्र व्यवहार करें। (II)

फर्मे संन्धि कर ले।

हलः बाजार माँग फलन $p = 15 - 0.5q$ तथा $q = q_1 + q_2$ फर्मो के लागत फलन $c_1 = 1 + 0.55q_1^2$; तथा $c_2 = 1.5 + 0.75q_2^2$ है।

(I) जब फर्मे एक दूसरे से स्वतंत्र रहकर अपना अपना लाभ अधिकतम करती है। तो

$$\pi_1 = R_1 - C_1 = (15 - 0.5q)q_1 - (1 + 0.55q_1^2)$$

या $\pi_1 = 15q_1 - 0.5\,(q_1 + q_2)q_1 - 1 - 0.55q_1^2$

या $\pi_1 = 15q_1 - 1.05q_1^2 - 0.5q_1q_2 - 1 - - - - - - -(i)$

लाभ अधिकतम होने की आवश्यक शर्त–

$$\frac{\partial\pi}{\partial q_1} = 0 => \frac{\partial}{\partial q_1}(15q_1 - 1.05q_1^2 - 0.5q_1q_2 - 1) = 0$$

$$=> 15 - 2.1q_1 - 0.5q_2 = 0$$

$$=> 2.1q_1 + 0.5q_2 = 15 - - - - - -(ii)$$

इसी प्रकार $\pi_2 = (15 - 0.5q)q_2 - (1.5 + 0.75q_2^2)$

या $\pi_2 = 15q_2 - 0.5q_1q_2 - 0.5q_2^2 - 1 - 0.75q_2^2$

या $\pi_2 = 15q_2 - 0.5q_1q_2 - 1.25q_2^2 - 1.5 - - - - - (iii)$

तथा $\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 0 => \frac{\partial}{\partial q_2}\ (15q_2 - 0.5q_1q_2 - 1.25q_2^2 - 1.5) = 0$

या $15 - 0.5q_1 - 2.5q_2 = 0$

या $0.5q_1 + 2.5q_2 = 15 - - - - - - (iv)$

समीकरण (ii) तथा (iv) को हल करने पर $q_1 = 6$ तथा $q_2 = 4.8$ तथा कुल उत्पादन $q = 10.8$

बाजार मूल्य $p = 15 - 0.5(6 + 4.8) = 9.6$

प्रथम फर्म का लाभ– समीकरण (i) में q_1 तथा q_2 का मान रखने पर $\pi_1 = 36.8$

तथा इसी प्रकार समीकरण (iii) में q_1 तथा q_2 का मान रखने पर $\pi_2 = 25.3$

फर्मो की सीमान्त आय $MR_1 = 6.6,\ \ MR_2 = 7.2$

(II) जब दोनो फर्मे संन्धि करके उद्योग का लाभ अधिकतम करती है

$\pi = R - C$ जहाँ $C = c_1 + c_2$

या $\pi = (15 - 0.5q)q - (1 + 0.55q_1^2 + 1.5 + 0.75q_2^2)$

या $\pi = 15q - 0.5q^2 - 0.55q_1^2 - 0.75q_2^2 - 2.5 - - - - - - -(v)$

संयुक्त लाभ अधिकतमीकरण की आवश्यक शर्तः $\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = 0$ तथा $\frac{\partial \pi}{\partial q_2}$

अब $\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = 0\ \ => \frac{\partial}{\partial q_1}(15q - 0.5q^2 - 0.55q_1^2 - 0.75q_2^2 - 2.5) = 0$

$$=> 15 - q - 1.1q_1 = 0$$

$$=>\ \ 2.1q_1 + q_2 = 15 - - - - - - - - - -(vi)$$

तथा $\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = 0\ \ => \frac{\partial}{\partial q_2}(15q - 0.5q^2 - 0.55q_1^2 - 0.75q_2^2 - 2.5) = 0$

$$=> 15 - q - 1.5q_2 = 0$$

$$=>\ q_1 + 2.5q_2 = 15 - - - - - - - - (vii)$$

समीकरण (vi) तथा (vii) को हल करने पर

$q_1 = \frac{90}{17}$ तथा $q_2 = \frac{66}{17}$ तथा $q = \frac{156}{17}$

अब पर्याप्त शर्तः– $\frac{\partial^2 \pi}{\partial q_1^2} < 0$ तथा $\frac{\partial^2 \pi}{\partial q_2^2} < 0$

$$=> \frac{\partial}{\partial q_1}(15 - q - 1.1q_1)$$

$$= 0 - 1 - 1.1 < 0$$

तथा

$$\frac{\partial}{\partial q_2}(15 - q - 1.5q_2)$$

$$= 0 - 1 - 1.5 < 0$$

समीकरण (v) में q_1, q_2 तथा q के मान रखने पर

संयुक्त लाभ $\pi = 66.04$

4.9 अभ्यास प्रश्न

(1) रिक्त स्थानों को भरिए।

(क) फलन $y = e^x$ का n कोटि का अवकलज .... होग। $.(ne^{nx}/e^x)$

(ख) जब वस्तु A के मूल्य में वृद्धि होने पर वस्तु B की मांग बढ जाये तो दोनो वस्तुयें एक दूसरे की .... वस्तुएं कहलायेगी।(पूरक/स्थानापन्न)

(ग) काबॅ–डगलस प्रातिस्थापन की लोच .... होती है। (इकाई/शून्य)

(घ) यदि किसी उत्पादन में समांगता की घात 1.5 हो तो यह फलन उत्पादन के .... हुए प्रतिफल देगा। (घटते/बढते)

(ङ) समोत्पाद वक्रों एवं सम–लागत रेखाओं के स्पर्श बिन्दुओं के बिन्दु पथ को .... कहते है। (विस्तार पथ/रिज रेखा)

(2) निम्न कथन में सत्य एवं असत्य को चिह्नित कीजिए।

(क) कॉब–डगलस उत्पादन फलन की समांगता की कोटि सदैव इकाई होती है। (सत्य/असत्य)

(ख) पूरक वस्तुओं के लिये आडी मांग की लोच ऋणात्मक होती है। (सत्य/असत्य)

(ग) प्रतिस्थापन प्रभाव सदैव धनात्मक होता है। (सत्य/असत्य)

(घ) लाभ अधिकतमीकरण की आवश्यक शर्त $MR > MC$ है। (सत्य/असत्य)

(ङ) आंशिक अवकलन किसी बहुचरीय फलन में सभी चरों में एक साथ परिवर्तन के परिणाम स्वरूप फलन में होने वाले परिवर्तन की दर को बताता हैं। (सत्य/असत्य)

4.10 अभ्यास प्रश्नों के उत्तरः

(1) (क) e^x (ख) स्थानापन्न (ग) इकाई (घ) बढते (ड) विस्तार पथ

(2) (क) असत्य (ख) सत्य (ग) असत्य (घ) असत्य (ड) असत्य

4.11 सांराश

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप आंशिक अवकलज पूर्ण अवकलन एवं उनके आर्थिक अनुप्रयोग से सुपरिचित हो गये है। अर्थशास्त्र में बहुधा एक से अधिक चरों की बात होती है, जैसे, उपभोक्ता सिद्धान्त में उपभोक्ता द्वारा दो वस्तुओं के विभिन्न संयोगों का प्रयोगा, उत्पादन सिद्धान्त में उत्पादक द्वारा प्रायः दो साधनों पूँजी तथा श्रम का प्रयोग एवं माँग फलन में वस्तु की माँग का अपनी कीमत के अलावा अन्य कई चरों जैसे– आय, रूचि आदि पर निर्भर होना इत्यादि। ऐसे द्विचरीय या बहुचरीय सिद्धान्तों के विश्लेषण हेतु आंशिक अवकलज एवं पूर्ण अवकलज प्राप्त करने की विधियाँ अत्यन्त सहायक सिद्ध होगे।

4.12 शब्दावली

विभेदात्मक एकाधिकार– जब एकाधिकारी द्वारा एक ही वस्तु की भिन्न बाजारों में, जहाँ माँग की दशायें भिन्न–भिन्न हों अलग–अलग कीमत पर बेचा जाये।

अल्पाधिकार– बाजार की एक विशिष्ट दशा जिसमें कुछ विक्रेता हो जो एक दूसरे की लगभग स्थानापन्न वस्तुयें बेचते हो।

समांगा फलन– जिन फलनों के सभी पदों की घात समान हो।

आडी माँग लोच– जब किसी वस्तु की माँग में परिवर्तन का प्रतिशत किसी दूसरी वस्तु के मूल्य में परिवर्तन के प्रतिशत के सापेक्ष निकाला जाय।

4.13 सहायक ग्रन्थ

1. मिश्र, जे.पी., गणितीय अर्थशास्त्र, सहित्य भवन पब्लिकेशन।

2. *Agarwal, D.R.; Quantitative Methods: Mathematics and Statistics, Vrinda Pub.*

3. अग्रवाल, डी.आर.; गणितीय अर्थशास्त्र, वृन्दा पब्लिकेशन्स।

4. मेहता, बी.सी. एवं मदनानी, जी.एम.के; अर्थशास्त्र में प्रारम्भिक गणित; लक्ष्मीनारायण अग्रवाल पब्लिकेशन्स

6. डा0 एस.एन. लाल, डा0 एस.के. चतुर्वेदी एवं डा0 एस. के. लाल; आर्थिक विश्लेषण की तकनीकि; शिव पब्लिकेशन्स।

4.14 सन्दर्भ ग्रन्थ

1. महेश चन्द्र; मेहरोत्रा, प्रकाश नारायण; अर्थशास्त्रीय गणित; उत्तर प्रदेश हिन्दी ग्रंथ अकादमी, लखनऊ।

2. *Archibald, G. C. and Lipsey R. G.; A Mathematicaltreatment of Economics; Third Edition; AITBS Publishers & Distributors.*

3. *Monga, G. S.; Mathematics and Statistics for Economists.*

4. *Allen, R. G. D.: Mathematical Analysis for Economics, Macmillan & CO., Ltd.* 1938.

5. *Chiang; Alpha . Co.: Fundamental Methods of Mathematical Economics, McGRAW – HILL Book Company* 1984.

4.15 निबन्धात्मक प्रश्न

प्रश्न1: यदि किसी फर्म का उत्पादन फलन $q = 3KL^2 + K^2$ हो जहाँ उत्पादन में दो साधनों K तथा L का प्रयोग हो रहा हो तो दोनो साधनों की सीमान्त उत्पादकता ज्ञात कीजिए।

प्रश्न2: फलन $Q = x_1^2 - 2x_1y_2 + x_2^2$ का प्रथम घात का कुल अवकलन ज्ञात कीजिए।

प्रश्न3: फलन $z = 8x^3 + 2xy - 3x^2y^2 + 1$ मे उच्चिष्ठ, निम्निष्ठ एवं काठी बिन्दु का परीक्षण कीजिए।

प्रश्न4: फलन $L = f(x, y): L = 2x^3 + 3y^2$ को सीमा $5x + 6y = 0$ से बॉधकर बन्धित निम्निष्ठ ज्ञात कीजिए।

प्रश्न5: किसी उपभोक्ता का उपयोग्िता फलन $U = f(q_1, q_2) = e^{q_1q_2}$ है। यदि वस्तु q_1 की कीमत 1 रू0 तथा q_2 की कीमत 5 रू0 एवं उपभोक्ता की आय10 रू0 हो तो उपभोक्ता द्वारा अधिकतम संतुष्टि हेतु q_1 तथा q_2 की उपभोग की मात्रा ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 6: कॉब–डगलस उत्पादन फलन $Q = AK^{\propto}L^{\beta}$ की समांगता की जॉच कीजिए। यदि $\propto = 0.73$ तथा $\beta = 0.85$ हो तो यह उत्पादन फलन पैमाने के कैसे प्रतिफल को

दर्शायेग। उपरोक्त फलन में श्रम (L) तथा पूॅज (K) के सापेक्ष उत्पादन की लोच ज्ञात कीजिए।

प्रश्न7: किसी एकाधिकारी एक ही वस्तु को दो भिन्न–भिन्न बाजार में भिन्न–भिन्न मूल्य पर बेचता है यदि दोनो बाजारों के मांग फलन $P_1 = 80 - 5x_1$ तथा $P_2 = 180 - 20x_2$ हो और कुल लागत फलन $50 + 20(x_1 + x_2\ )$ हो तो एकाधिकारी द्वारा दोनो बाजारों में तथा मूल्य, मात्रा एवं लाभ ज्ञात कीजिए।

प्रष्न8: किसी द्वियाधिकारी बाजार में प्रचलित मांग फलन एवं लागत फलन निम्नलिखित हैं।

$$P = 90 - 0.5(q_1 + q_2\ )$$

$$c_1 = 0.5q_1$$

$$c_2 = 0.5q_2$$

यदि दोनो विक्रेता एक दूसरे से स्वतन्त्र होकर निर्णय लें तो दोनो के लाभ अधिकतमीकरण करने वाले मूल्य तथा मात्राएं ज्ञात कीजिए।

इकाई – 5 समाकलनन : अवधारणा एवं निर्वचन

5.1 प्रस्तावना

आर्थिक तथ्यों के विष्लेषण में हमें अनेंकों बार सूक्ष्म से व्यापक और व्यापक से सूक्ष्म की ओर आना पड़ता है। अत्यन्त सरल रूप में कुल लागत से सीमान्त लागत तथा कुल आगम से सीमान्त आगम ज्ञात करते हैं। अवकलन का अध्ययन करते समय हमने देखा कि कुल लागत / आगम दिये होने पर सीमान्त लागत / आगम का मान ज्ञात किया जा सकता है। समाकलनन, अवकलन की उल्टी प्रक्रिया है जिसमें यदि सीमान्त लागत/आगम दिया हो तो कुल लागत/आगम ज्ञात किया जा सकता है।

5.2 उद्देश्य

प्रस्तुत इकाई के अध्ययन द्वारा पाठक –

⇒ समाकलनन क्या है?

⇒ अवधारण, निर्वचन तथा मूल नियम

⇒ विभिन्न समाकलनन ज्ञात करने की विधि की जानकारी प्राप्त करेगें।

5.3 समाकलनन अवधारणा

समाकलनन की अवधारणा वास्तव में इसके दो भिन्न लक्षणों और दो भिन्न प्रयोगों में निहित है। एक दृष्टि में समाकलन एक निश्चित भौग्कि अभिव्यक्ति (Summation expression) का सीमांकित मूल्य है, जो गणितीय विष्लेषण में दृष्टिगेचर होता है, आरेखीय (diagrammatic) शब्दावली में एक वक्र के भीतर के क्षेत्रफल को व्यक्त करता है। इस दृष्टिकोण से समाकलन को निश्चित समाकलन (definite integral) कहते हैं। दूसरे दृष्टिकोण से समाकलनन अवकलन की उल्टी प्रक्रिया है। किसी चर के फलन का अवकलज उसी चर का फलन होता है। यदि इसका व्युत्क्रम प्रात किया जाए तो दूसरा फलन ऐसा प्राप्त होता है जिनका पहला फलन अवकलज था। यदि अवकलज का अस्तित्व है तो दूसरा फलन ही समाकलन होता है और इस दृष्टिकोण से समाकलन को अनिश्चित समाकलन कहते हैं। समाकलन प्राप्त करने की प्रक्रिया को समाकलनन कहते हैं। इस प्रकार समाकलन की अवधारणा निश्चित तथा अनिश्चित समाकलन में निहित है।

5.4 अनिश्चित समाकलनन (Indefinite Integral)

हम पहले अनिश्चित समाकलनन को ही लें। यदि F(X), X का ऐसो फलन हो कि

$$\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$$

तो F(X) को X के सापेक्ष प्रति अवकलज (antiderivative) या f(X) का समाकलन कहते हैं और सांकेतिक रूप से इस प्रकार लिखते हैं।

$$F(x)=\int f(x)\,dx \qquad (1)$$

समी0 (1) से प्रयुक्त संकेतों का अर्थ इस प्रकार है –

(i) f(X) समाकलनन किए जाने वाले फलन को व्यक्त करता है इसे समाकलनन (Integrand) भी कहते हैं।

(ii) dX यह व्यक्त करता है कि समाकलनन X के सापेक्ष किया जा रहा है।

(iii) f समाकलनन के चिन्ह को व्यक्त करता है जो अवकलन प्रक्रिया का विपरीत है।

(iv) dX, X का अवकल है अतः f(X) कग को मूल फलन F(X) का अवकल भी कहा जा सकता है। इस प्रकार –

$$dF(x)=f(x)dx$$

या $$F(x)=\int f(x)dx$$

$F(x), f(x)$ का X के सापेक्ष अनिश्चित समाकलन है। यहाँ यह ध्यान देने योग्य बात है कि –

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]=f(x)$$

चूँकि अनिश्चित समाकलनन का कोई निश्चित अंकात्मक मान नहीं होता (इसका कारण यह है कि फलन X के साथ परिवर्तित होता है) इसलिए समाकलनन के साथ एक स्थिरांक (Constant) C जोड़ देते हैं अर्थात् –

$$\left[\int f(x)dx\right]= F(x)+C$$

C को रखने का कारण इस प्रकार भी समझा जा सकता है।

फलन x^2, x^2+3 और x^2+6 पर विचार करें तो तीनों का अवकलज 2X ही है। इस प्रकार अवकलज समान रहते हुए भी फलन में स्थिरांक की भिन्नता स्वाभिक है, इसलिए हम समाकलनन के साथ स्थिर पद जोड़ देते हैं। स्थिर पद के जोड़ने की बात को आरेखीय पद्धति से भी समझा जा सकता है लेकिन हम यहाँ उसकी जरूरत महसूस नहीं कर रहे हैं।

5.5 समाकलनन के कुछ नियम

जिस प्रकार हम अवकलन को कुछ नियमों की सहायता से सुविधापूर्वक समझ लेते हैं उसी प्रकार समाकलनन के भी अपने कुछ नियम होते हैं। ये नियम बहुत कुछ अवकलन के नियमों पर निर्भर करते हैं।

(1) घातांक नियम (Power Rules)

हमने देखा कि यदि

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \text{ तो}$$

$$\int f(x).dx = F(x) + C$$

मान लेते हैं $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

अतः $\frac{d}{dx} = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$ यदि $n \neq -1$

इसलिए $x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \; (n \neq -1)$

इस नियम के आधार पर

$$\int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} + c$$

$$\int x^5 \, dx = \frac{x^6}{6} + c$$

$$\int x^{-3}\,dx = \frac{-x^{-2}}{2} + c$$ इत्यादि

इस आधार पर समाकलनन करते समय X के घातांक में एक जोड़कर नये घातांक से भाग देते हैं और एक स्थिर पद जोड़ देते हैं।

जैसे $$\int x^{4}\,dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{x^{5}}{5} + c$$

टिप्पणी

यदि फलन के साथ कोई स्थिर पद का गुणा हो तो समाकलनन करने समय स्थिर पद को बाहर ले लेते हैं जैसे –

$$\int 5x\,dx = 5\int x\,dx = \frac{5x^{2}}{2} + c$$

(b) यदि केवल स्थिरांक का समाकलनन करना हो तो उसके साथ $\int 1.dx$ आ जाता है जिसका समाकलन X होगा।

$$\int 1.dx = \int x^{0}\,dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + c = \frac{x^{1}}{1} + c$$

$$= x + c$$

इस प्रकार $16\,dx = 16.1\,dx = 16x + c$

(2) चरधातांकीय नियम (The EXponential Rule)

हम जानते हैं कि –

$$\frac{d}{dx}e^{x} = e^{x}$$

इसलिए $$\int e^{x}dx = e^{x} + c, dx$$

(ii) $$\frac{d}{dx}a^{x} = a^{x}\log_{e} a$$

$$\int a^{x}\log_{e} a = a^{x} + c$$

अथवा $$\int a^{x}\,dx = \frac{a^{x}}{\log_{e} a} + c$$

(3) लघुगुणकीय नियम (The Logarithmic Rule)

हम जानते हैं कि –

$$\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x}$$

अतः $\int \frac{1}{x} dx = \log x + c$

(4) दो फलनों के योगा अथवा अन्तर का समाकलनन

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int f_1(x)\, dx \pm \int f_2(x)\, dx$$

इस प्रकार दो फलनों के योग अथवा अन्तर का समाकलनन उन फलनों के अलग–अलग समाकलन का योग अथवा अन्तर होता है।

उदाहरणः –

निम्न फलनों का X के सापेक्ष समाकलन ज्ञात कीजिए।

(i) $X^7, X^{-6}, 16X^3, 5X^{-2}$

(ii) $X^3 + 3X^2 + 7$

(iii) (5-2X)

(iv) $\frac{1}{x\sqrt{x}}$

(v) $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{17}$

(vi) $5e^x + x^{\frac{3}{2}}$

(vii) $x^3 + 5x - \frac{6}{x^2}$

(viii) $\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x5} + \frac{1}{3\sqrt{x^9}}$

(ix) $5^x + bx^2 + 5e^x$

(x) $ax^2 + bx + \frac{c}{\sqrt{x}}$

हल –

(i) $\int x^7 dx = \frac{x^8}{8} + c$ क्योंकि हम जानते हैं कि $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

$$\int x^6 dx = \frac{x^{-6+1}}{-6+1} + c = \frac{-x^5}{5} + c$$

$$\int 16x^3 dx = 16\int x^3 dx = \frac{16x^4}{4} + c = 4x^4 + c$$

$$\int 5x^{-2} dx = 5\int x^{-2} dx = \frac{5x^{-1}}{-1} + c = -5x^{-1} + c$$

$$= \frac{-5}{x} + c$$

(ii) $\int (x^3 + 3x^2 + 7)\, dx = \int x^3 dx + \int 7 dx$

$$= \int x^3 dx + 3\int x^2 dx + 7\int 1 dx$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{3x^3}{3} + 7x + c = \frac{x^4}{4} + x^3 + 7x + c$$

(iii) $\int (5 - 2x)\, dx = \int 5dx - 2\int x dx$

$$= 5x - \frac{2x^2}{2} + c = 5x - x^2 + c$$

(iv) $\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx = \int x^{\frac{-3}{2}} dx = \frac{x^{\frac{-3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + c$

$$= \frac{x^{\frac{-1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = -2x^{\frac{-1}{2}} + c$$

(v) $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{17}\right) dx = \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{17}\int 1dx$

$$= \int x^{-2} dx + \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{17} 1dx$$

$$= -x^{-1} + \log x - \frac{1}{17}x + c$$

$$= -\frac{1}{x} + \log x - \frac{1}{17}x + c$$

(vi) $\int\left(5e^x + x^{\frac{3}{2}}\right)dx = 5\int e^x dx + \int x^{\frac{3}{e}}\, dx$

$$= 5e^x + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c = 5e^x + \frac{2}{5} \times \frac{5}{2} + c$$

(vii) $\int\left(x^3 + 5x - 6\right)\frac{dx}{x^2}$

$$= \int\left(\frac{x^3}{x^2} + \frac{5x}{x^2} - \frac{6}{x^2}\right)dx$$

$$= \int x dx + 5\int \frac{1}{x}dx - 6\int x^{-2}dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 5\log x + 6x^{-1} + c$$

$$= \frac{x^2}{2} + 5\log x + \frac{6}{x} + c$$

(viii) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x^5} + \frac{1}{3\sqrt{x^9}}\right)dx$

$$= \int x^{-\frac{1}{2}}dx + \int x^{\frac{5}{2}}dx + \int x^{-\frac{9}{3}}dx$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{2}x^{-2} + c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{7}\sqrt{x^7} - \frac{1}{2x^2} + c$$

(iX) $\int (5x^x + bx^2 + 5e^x)\, dx$

$$=\int 5x^{x}dx+b\int x^{2}dx+5\int e^{x}dx$$

$$=\frac{5^{x}}{\log_{e}^{5}}+\frac{bx^{3}}{3}+5e^{x}+c$$

(X) $$\int\left(\frac{ax^{2}+bx+c}{\sqrt{x}}\right)dx$$

$$=\int ax^{2}.x^{\frac{-1}{2}}dx+\int bx.x^{\frac{-1}{2}}dx+\int cx^{\frac{-1}{2}}dx$$

$$=a\int x^{\frac{3}{2}}dx+b\int x^{\frac{1}{2}}dx+c\int cx^{\frac{-1}{2}}dx$$

$$=\frac{2}{5}ax^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}bx^{\frac{3}{2}}+2cx^{\frac{1}{2}}+c$$

5.6 कुछ फलनों के समाकलन

(i) $\int (a+sb)^{n}\,dx=\frac{1}{b}(n+1)(a+bx)^{n+1}+c$

(ii) $\int \sin x\,dx=-\cos x+c$

(iii) $\int \cos x\,dx=\sin x+c$

(iv) $\int \tan x\,dx=-\log\cos x+c$

(v) $\int \sec x.\tan x\,dx=\sec x+c$

(vi) $\int \mathrm{cosec}\,x.\cot x\,dx=-\mathrm{cosec}\,x+c$

(vii) $\int \mathrm{cosec}^{2}x\,dx=-\cot x+c$

(viii) $\int \sec^{2}x\,dx=\tan x+c$

5.7 प्रतिस्थापन द्वारा समाकलनन

साधारणतया $\int f(x)dx$ को हम एक दूसरे फलन $f(u)du$ में बदल सकते हैं यदि X को उचित रूप में न द्वारा प्रतिस्थापित किया जा सके। यह विधि विशेषकर दो फलनों के

गुणनफल का समाकलन ज्ञात करने में उपयोगी होती है। उहाहरण द्वारा हम इसे आसानी से समझ सकते हैं।

यदि हमें $3x^2(x^3+7)dx$ का मान ज्ञात करना हो तो मान लेते हैं $-t=x^3+7$

या $dt=3x^2dx$ (अवकल (differential) का प्रयोग करने पर) इसे हम इस रूप में भी देखें $t=x^3+7, x$ के सापेक्ष t का अवकलज

$$\frac{dt}{dx}=3x^2 \quad \text{या} \quad dt=3x^2.dx$$

t का मान मूल फलन में रखनें पर (ध्यान रहे dX को भी dt के सन्दर्भ में बदलना पड़ता है)

$$\int tdt \quad \text{क्योंकि} \quad 3x^2dx = dt$$

$$=\frac{t^2}{2}+c=\frac{(x^2+7)^2}{2}$$

इसी प्रकार यदि $\int(2+3x)^7 dx$ का मान ज्ञात करना हो तो

$2+3x=t$ मान लेते हैं।

या $3dx = dt$ या $dx = \frac{dt}{3}$

पुनः $\int t^7.\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\int t^7dt$ ए

$$\frac{1}{3}\frac{t^8}{8}+c=\frac{1}{24}t^8+c=\frac{1}{24}(2+3x)8+c$$

यदि $\int e^{ax} dx$ ज्ञात करना हो तो –

$t= ax$

$dt= adx$ या $dx = \frac{1}{adt}$

$$\int e^{ax} dx=e^t.\frac{dt}{a}=\frac{1}{a}\int e^tdt =\frac{1}{a}e^t +c$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} + c$$

उदाहरण –

निम्न फलनों का X के सापेक्ष समाकलन ज्ञात कीजिए –

(i) $4xe^{x^2+5}.8xe^{x^2+3}.e^{5x}$

(ii) $(3x^2+1)(x^3+x)$

(iii) $3x^5+\frac{1}{x^6}+2x$

(iv) $4x^2\sqrt{2}(x^3+3)$

हल –

(i) $\int 4xe^{x^2+5}dx$

मान लिया कि –

$t = x^2 + 5$

$dt = 2x\,dx$

या $4XdX = 2dt$ (2 से दोनों तरफ गुणा करने पर)

अतः $\int 4xe^{x^2+5}dx = \int e^t.2dt = 2\int e^t dt$

$= 2e^t + c = 2e^{x^2+5} + c$

$\int 8xe^{x^2+3}\,dx$

मान लिया कि $t = x^2 + 3$

$dt = 2xdx$

या $8xdx = 4dt$

$\int 8xe^{x^2+3}dx = \int e^t 4dt = 4\int e^t dt = 4e^t + c$

$= 4e^{x^2+3} + c$

$\int e^{5x}\,dx$

मान लिया कि $t = 5x$

$$dt = 5dx \quad \text{या} \quad dx = \frac{dt}{5}$$

$$\int e^{5x} dx = \int e^{t} . \frac{dt}{5} = \frac{1}{5}\int e^{t} dt = \frac{1}{5}e^{t} + c$$

$$= \frac{1}{5}e^{5x} + c$$

(ii) $\int (3x^2 + 1)(x^3 + x)\, dx$

मान लिया कि $t = x^3 + x$

$$dt = (3x^2 + 1)\ dx$$

$$\int (3x^2 + 1)(x^3 + x)\, dx$$

$$= \int t dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{(x^3 + x)^2}{2} + c$$

इस प्रश्न को एक अन्य तरीके से भी हल किया जा सकता है।

$$\int (3x^2 + 1)(x^3 + x)\ dx$$

$$= \int (3x^5 + 3x^3 + x^3 + x)\, dx$$ आपस में गुणा करने पर –

$$= \int 3x^5 dx + \int 3x^3 dx + \int x^3 dx + \int x dx$$

$$= \frac{3x^6}{6} + \frac{3x^4}{4} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + c$$

$$= \frac{x^6}{2} + \frac{3x^4}{4} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + c$$

$$= \frac{x^6}{2} + \frac{4x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + c$$

$$= \frac{x^6}{2} + x^4 + \frac{x^2}{2} + c$$

$$=\frac{(x^3+x)^2}{2}+c$$

(iii) $\int \frac{3x^5+1}{x^6+2x}dx$

मान लिया कि –

$$t=x^6+2x$$

या $dt=(6x^5+2)dx$

$$\frac{dt}{2}=(3x^5+1)dx$$

अतः $\int \frac{3x^5+1}{x^6+2x}dx=\int \frac{1}{t}.\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int \frac{1}{t}.dt=\frac{1}{2}\log\ r+c$

$$=\frac{1}{2}\log(x^6-2x)+c$$

(iv) $\int 4x^2\sqrt{(x^3+3)}$

मान लिया कि –

$$t=x^3+3$$

$$dt=3x^2\ dx$$

या $x^2dx=\frac{dt}{3}$

या $4x^2dx=\frac{4}{3}dt$

अतः $\int 4x^2\sqrt{(x^3+3)}\,dx$

$$=\int t^{\frac{1}{2}}.\frac{4}{3}dt=\frac{4}{3}\int t^{\frac{1}{2}}dt$$

$$=\frac{4}{3}.\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{4}{3}.\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+c$$

$$=\frac{8}{9}.(x^3+3)^{\frac{3}{2}}+c$$

निम्न को हल कीजिए –

(i) $\int \frac{xdx}{\sqrt{(1+x^2)}}$

(ii) $\int \sqrt{e^x}\, dx$

(iii) $\int \frac{3^{3x}}{e^{3x}+6}\, dx$

(iv) $\int \frac{1}{x} \log xdx$

हल –

(i) $\int \frac{xdx}{\sqrt{(1+x^2)}}$

मान लिया कि $t=1+x^2$

$dt = 2xdx$

या $xdx=\frac{dt}{2}$

अतः $\frac{xdx}{\sqrt{(1+x^2)}}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$=\frac{1}{2}.2t^{\frac{1}{2}}+c=t^{\frac{1}{2}}+c$$

$$=\sqrt{(1+x^2)}+c$$

(ii) $\int \sqrt{e^x} dx$

मान लिया कि –

$$=\int e^{\frac{x}{2}}dx \qquad t=\frac{x}{2}$$

$$dt=\frac{1}{2}dx \quad \text{या} \quad dx=2\,dt$$

अतः $\int x^x dx=\int e^{\frac{x}{2}}dx$

$$=\int e^t.2dt=2e^t\,dt$$

$$=2e^t+c=2e^{\frac{x}{2}}+c=2\sqrt{e^x+c}$$

(iii) $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+6}dx$

मान लिया कि $t=e^{3x}+6$

$$dt=3e^{3x}\,dx \quad \text{या} \quad e^{3x}\,dx=\frac{dt}{3}$$

अतः $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+6}dx=\int \frac{1}{t}.\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\int \frac{1}{t}dt$

$$=\frac{1}{3}\log t+c=\frac{1}{3}\log(e^{3x}+6)+c$$

(iv) $\int \frac{1}{x}\log x dx$

$$=\int t dt \quad \text{क्योंकि} \quad t=\log x$$

$$=\frac{t^2}{2}+c \qquad dt \ \ \frac{1}{x}dx$$

$$\frac{1}{2}(\log x)^2+c$$

5.8 खण्डः समाकलन

यह विधि काफी प्रचलित है। इसका प्रयोग दो फलनों के गुणनफल का समाकलन ज्ञात करने में किया जाता है। यदि X के दो फलन u और v हों तो हम जानते हैं कि –

d(uv) = udv + vdv (differential के नियम के अनुसार)

अब $udv = d\,(uv) - vdu$

समाकलन करने पर –

$$\int udv = uv - \int vdu$$

इसी खण्ड को खण्डः समाकलन कहते हैं।

खण्डः समाकलन को सुविधापूर्वक निम्न रूप में लिखा जा सकता है।

$$\int uvdx = u\int vdx - \int\left[\frac{du}{dx}.vdx\right]dx \qquad (i)$$

अर्थात् दो फलनों के गुणनफल का समकलन

= पहला फलन × दूसरे फलन का समाकलन – पहले फलन का अवकलज और दूसरे फलन के समाकलन के गुणनफल का समाकलन।

यहाँ समी0 (1) में u और v दोनों X के फलन हैं। यहाँ पर एक बात ध्यान देने योगय है कि हम दोनों फलनों में से किसी को पहला और किसी को दूसरा फलन मान सकते हैं लेकिन दूसरा फलन उसे ही मानना चाहिए जिसका समाकलन सुविधापूर्वक ज्ञात किया जा सके।

उदाहरणः –

(1) निम्न का मान ज्ञात कीजिए –

(i) $\int x^3 ex\, dx$ (ii) $\int \log x\, dx$ (iii) $\int \log x^3 dx$

(iv) $\int (x+3)(x+1)^{\frac{1}{2}}\, dx$ (v) $\int x \log x^2 dx$

हल

(i) $\int x^3\, ex\, dx$

यहाँ पर अगर हमने X^3 को दूसरा फलन माना तो दूसरे हिस्से के समाकलन में X की घात बढ़ती जाएगी। X^3 को पहला फलन मान लें तो खण्डषः समाकलन की विधि द्वारा –

$$\int x^3 e^x dx = x^3\int e^x dx - \int\left[\frac{d}{dx}x^3\int e^x dx\right]dx$$

$$= x^3e^x - \int 3x^2e^x dx = x^3e^x - 3\int x^2e^x dx$$

$$= x^3e^x - 3\left[x^2\int e^x dx - \int\left\{\frac{d}{dx}x^2\int e^x dx\right\}dx\right]$$

$$= x^3e^x - 3\left[x^2e^x - \int 2xe^x dx\right]$$

$$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6\int xe^x dx$$

$$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6\left[x\int e^x dx - \int\left\{\frac{d}{dx}x\int e^x dx\right\}dx\right]$$

$$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6\left[xe^x - \int e^x dx\right]$$

$$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + c$$

$$= e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c$$

(ii) $\int \log x\, dx = \int 1.\log x\, dx$

यहाँ पर $\log X$ को पहला फलन मानना पड़ेगा अतः

$$\int \log x\, dx = \log x\int 1.dx - \int\left[\frac{d}{dx}\log x\int \log x\int 1.dx\right]dx$$

$$= \log x.x - \int \frac{1}{x}.x.dx$$

$$= x\log x - \int 1.dx = x\log x - x + c$$

$$= x(\log x - 1) + c$$

(iii) $\int \log x^3 dx = \int 1.\log x^3 dx$

$$= \log x^3\int 1.dx - \int\left[\frac{d}{dx}\log x^3 1.dx\right]dx$$

$$= \log x^3.x - \int \frac{3x^2}{x^3}.xdx$$

$$= x\log x^3 - 3\int 1.dx = x\log x^3 - 3x + c$$

$$=x(\log x^3-3)+c$$

(iv) $\int (x+3)(x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$$=(x+3)\int (x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx-\int\left[\frac{d}{dx}(x+3)(x+1)^{\frac{1}{2}}dx\right]dx$$

$$=(x+3).\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-\int 1\times\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$=\frac{-2}{3}(x+3)(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\int (x+1)^{\frac{3}{2}}.dx$$

$$=\frac{2}{3}(x+3)(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}.\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}+c$$

$$=\frac{2}{3}(x+3)(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}}+c$$

$$=\frac{2}{15}(x+1)^{\frac{3}{2}}(3x+13)+c$$

(v) $\int x\log x^2\,dx=\log x^2\int xdx-\int\left[\frac{d}{dx}\log x^2\int xdx\right]dx$

$$=\frac{x^2}{2}\log x^2-\int\frac{1}{x^2}2x\frac{x^2}{2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\log x^2-xdx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\log x^2-\frac{x^2}{2}+c$$

$$=\frac{1}{2}x^2(\log x^2-1)+c$$

5.9 भाग देकर समाकलन (Integration by Division)

किसी उचित भिन्नात्मक रूप वाले फलन में यदि अंश की उच्चतम घात, हर की उच्चतम घात से अधिक हो तो अंश में हर का भाग देकर समाकलन प्राप्त किया जा सकता है।

उदाहरण के तौर पर $\int \frac{x+1}{x-1}$ विचार करें। यहाँ अंश और हर दोनों में x की घात समान है अतः (X+1) में (X-1) से भाग किया जा सकता है अर्थात् –

$$\frac{x+1}{x-3} = 1 + \frac{2}{x\text{-}1} \text{ अतः}$$

$$\int \frac{x+1}{x-1} dx = \int \left(1 + \frac{2}{x-1}\right) dx$$

$$= \int 1dx + 2\int \frac{1}{x\text{-}1}\, dx$$

$$= x + 2 \log\,(x\text{-}1) + c$$

5.10 आंशिक भिन्नों द्वारा समाकलन (Integration by Partial Fractions)

आंशिक भिन्नों द्वारा समाकलन की रीति काफी उपयोगी है। यदि उचित भिन्न में हर की घात दो या दो से अधिक हो, तथा हर का गुणनखण्ड किया जा सके तो उस उचित भिन्न में परिवर्तित करके उनका समाकलन किया जा सकता है।

आंशिक भिन्नों के बारे में वैसे तो पर्याप्त विवेचन बीजगणित में मिलेगा लेकिन संक्षेप में हमें भी समझ लेना आवश्यक है।

$$\frac{\alpha_0 x^m + \alpha_1 x^{m-1} + \ldots\ldots \alpha_n}{\beta_0 x^n + \beta_1 x^{n-1} + \ldots\ldots \beta_n}$$

इस तरह के भिन्न को, जिसमें m तथा n धन पूर्ण संख्याएँ हो और $\alpha_0, \alpha_1, \ldots. \beta_0, \beta_1 \ldots.$ अचर हों, परिमेय बीजीय भिन्न (rational algebraic fraction) कहते हैं। ऐसे भिन्नात्मक व्यंजक का समाकलन उसे भिन्नहीन भाग अर्थात् बहुपद (Polynomial) और आंशिक भिन्नों में तोड़कर किया जा सकता है। बीजगणित हमें बताता है कि हरेक बहुपद के एकघात (linear) और द्विघात (quadratic) गुणनखण्ड किए जा सकते हैं। यह भी हो सकता है कि कुछ गुणनखण्ड कई बार आए अतः आंशिक भिन्नों के बारे में कुछ तथ्य निम्न हैं –

(i) यदि हर में अपुनरावृत्त (non-repeated) एक घात गुणनखण्ड (X-a) के संगत आंशिक भिन्न $\frac{A}{x-\alpha}$ रूप में होता है जैसे –

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}$$

$$\frac{5x}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}$$

(ii) हर के r बार पुनरावृत्त (repeated) गुणनखण्ड (X-b) r के संगत r आंशिक भिन्न का रूप इस प्रकार होता है –

$$\frac{A_1}{x-b}+\frac{A_2}{(x-b)^2}+\frac{A_3}{(x-b)^3}+....\frac{A_r}{(x-b)^r}$$ जैसे

$$\frac{2x}{(x-3)^2}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x-3)^2}$$

$$\frac{1}{(x-2)(x-5)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-5}+\frac{C}{(x-5)^2}$$

(iii) हर के अपुनरावृत्त द्विघात गुणनखण्ड $(aX^2 + bX + c)$ के संगत आंशिक भिन्न का रूप –

$$\frac{Ar+B}{ax^2+bx+c}$$ होता है जैसे –

$$\frac{x}{x^2+5}=\frac{Ar+B}{x^2+5}$$

$$\frac{1}{(x+3)(x^2+3)}=\frac{A}{x+3}+\frac{Bx+c}{x^2+3}$$

(iv) हर के बार पुनरावृत्त द्विघात गुणनखण्ड के संगत आंशिक भिन्न का रूप निम्न होता है –

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+....\frac{A_sx+B_s}{(ax^2+bx+c)^s}$$

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+....\frac{A_2x+B_5}{(ax^2+bx+c)^5}$$

जैसे –

$$\frac{x}{(x^2+3)^2} = \frac{Ar+B}{x^2+3} + \frac{Cx+D}{(x^2+3)^2}$$

$$\frac{1}{(x-2)(x^2+5)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+c}{(x^2+5)} + \frac{Dx+E}{(x^2+5)^2}$$

उपर्युक्त नियमों के प्रमाण की यहाँ आवश्यकता नहीं है। हमें इसे ज्यों का त्यों मान लेना चाहिए। आंशिक भिन्नों को हल करके A, B, C, D या A_1, A_2, A_3 .... इत्यादि का मान ज्ञात करते हैं जिसके लिए हम दोनों पक्षें में X के समान घातों के गुणांकों को बराबर करते हैं। कुछ उदाहरण लेकर हम इसे आसानी से स्पष्ट कर सकते हैं।

उदाहरण –

(1) $\int \frac{x+5}{x^2+5x+6}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए –

हल –

हम भिन्न $\frac{x+5}{x^2+5x+6}$ पर विचार करें। हर का गुणनखण्ड करने पर

$$\frac{x+5}{x^2+5x+6} = \frac{x+5}{(x+2)(x+3)}$$

$$\frac{x+5}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$$ (नियम i पर ध्यान दें)

$$= \frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{Ax+3A+Bx+2B}{(x+2)(x+3)}$$

चूँकि समीकरण के दाएं पक्ष (RHS) और बाएं पक्ष (LHS) में हर बराबर है अतः –

$x+5 = Ax+Bx+3A+2B$

या $(X+5)=x(A+B)+(BA+2B)$

दोनों तरफ X के गुणक को बराबर करने पर

$1 = A+B$ (i)

पुनः दोनों तरफ स्थिर पदों को बराबर करने पर

$$5 = 3A + 2B \qquad \text{(ii)}$$

समी० (i) और (ii) को यदि हल करें जिसके लिए समी० (1) में 3 से गुणा करके इसे समी० (ii) में से घटाया जाय तो

$$5 = 3A + 2B \qquad \text{(i)}$$

$$\underline{3} = 3\underline{A} \pm 3B \qquad \text{(ii)}$$

$$2 = -B \text{ or } B = -2$$

B का यह मान समीकरण (i) में रखने पर

$$1 = A - 2 \quad \text{or} \quad A = 1 + 2 = 3$$

अतः $= \dfrac{x+5}{(x+2)(x+3)} = \dfrac{3}{x+2} - \dfrac{2}{x+3}$

इसलिए $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2 5x+6}.dx = 3\int \frac{1}{x+2}\,dx - 2\int \frac{1}{x+3}dx$

$$= 3\log(x+2) - 2\log(x+3) + c$$

$$= \log\frac{(x+2)^3}{(x+3)^2} + c$$

(2) $\displaystyle\int \frac{1+x}{(1-x)^2}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल–

$$\frac{1+x}{(1-x)^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2}$$ [नियम (ii) याद करें,

$$= \frac{A(1-x)+B}{(1-x)^2}$$

अतः $1+x = A - Ax + B$

$$= -Ax + A + B$$

अब X के गुणक और स्थिर पद को दोनों तरफ बराबर करने पर

$$-A = 1 \qquad \text{(i)}$$

$$A+B=1 \qquad \text{(ii)}$$

समी0 (i) तथा (ii) से

$$A=-1, B=2$$

अतः $\int \frac{1+x}{(1-x)^2}\,dx = -\int \frac{1}{1-x}\,dx + 2\int \frac{1}{(1-x)^2}\,dx$

यदि $t=1-x$

$$dt=-dx \text{ or } dx=-dt$$

$$\int \frac{1+x}{(1-x)^2}\,dx = -\int \frac{1}{t}(-) + 2\int \frac{1}{t^2}(-dt)$$

$$=\int \frac{1}{t}dx - 2\int \frac{1}{t^2-dt}$$

$$=\log t + 2t^{-1} + c$$

$$=\log \frac{t+2}{t+c}$$

$$=\log \frac{(1-x)+2}{1-x+c}$$

5.11 सारांश

⇒ समाकलनन, अवकलन की उल्टी प्रक्रिया है।

⇒ कमाकलन द्वारा सीमान्त लागत / आगम दिये होने पर कुल लागत / आगम का मान ज्ञात कर सकते हैं।

⇒ समाकलनन की अवधारणा निश्चित एवं अनिश्चित समाकलन में समाहित है।

⇒ कुछ फलनों के समाकलन देखें Section 5.6 ।

⇒ समाकलनन की प्रमुख विधियाँ हैं – (1) प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन, (2) खण्ड – समाकलनन, (3) आंशिक भिन्न द्वारा समाकलनन, (4) भाग देकर समाकलनन।

⇒ समाकलनन के चार प्रमुख नियम होते हैं – (1) घातांक नियम (2) चरघातांकीय नियम, (3) लघुगुणकीय नियम, (4) वो फलनों के योग अथवा अन्तर का समाकलन।

5.12 सन्दर्भ ग्रन्थ

1.महेश चन्द्र; मेहरोत्रा, प्रकाश नारायण; अर्थशास्त्रीय गणित; उत्तर प्रदेश हिन्दी ग्रंथ अकादमी, लखनऊ।

2. *Archibald, G.C. and Lipsey R.G.; A Mathematicaltreatment of Economics; Third Edition; AITBS Publishers & Distributors.*

3. *Monga, G.S.; Mathematics and Statistics for Economists.*

4. *Allen, R.G.D.: Mathematical Analysis for Economics, Macmillan & CO., Ltd.* 1938.

5. *Chiang; Alpha .Co.: Fundamental Methods of Mathematical Economics, McGRAW – HILL Book Company* 1984.

5.11 अभ्यास के लिए प्रश्न

वस्तुनिष्ठ प्रश्न :

1. यदि $\frac{d}{dr}[f(x,)] = fx$ है, तो इसका समाकलनन क्या होग?

   (i) f(X) (ii) f(X)+c (iii)f(X)+c (iv) इनमें से कोई नहीं

2. निम्न में से कौन समाकलनन का नियम है–

   (i) घातीय नियम (ii) लघुगुणकीय नियम (iii) चरघातांकी नियम (iv) उपर्युक्त सभी

3. चूँकि अनिश्चित समाकलनन का कोई निश्चित अंकात्मक मान नहीं होता, इसलिए समाकलन के साथ एक .... जोड़ देते हैं।

   (i) चर (ii) स्थिरांक (iii) घातांक (iv) लघुगुणक

4. (X-1) (X-2) का समाकलन क्या होगा?

   (i) $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^3}{2} + 2x + c$ (ii) $\frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + c$

   (iii) $\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{2} + 6x + c$ (iv) $X^3 - 3X^2 + 2X + c$

5. $\int_1^4 \sqrt{x dr}$ का समाकलन होगा

(i) $\frac{3}{14}$ (ii) $\frac{21}{2}$ (iii) $\frac{16}{3}$

(iv) $\frac{14}{3}$

उत्तर : 1. (iii), 2. (iv), 3. (ii), 4. (i), 5. (iv)

सही (T) अथवा गलत (F) चिन्हित कीजिए–

1. अवकलन की प्रतिलोम प्रक्रिया को समाकलन कहते हैं।
2. $\int_a^a f(x)dx$ को निश्चित समाकलन कहते हैं जिसमें a तथा b क्रमशः उच्च एवं निम्न सीमाएँ कहलाती हैं।
3. $\int_a^a f(x)dx = 0,$ सही है।
4. यदि वक्र y = f (X) अन्तराल (a, b) के लिए धनात्मक है और वक्र X अक्ष से ऊपर है तो $\int_a^b f(x)dx$ धनात्मक होगा।
5. अर्थशास्त्र में कुल लागत फलन का समाकलन करने पर सीमान्त लागत फलन ज्ञात किया जाता है।

उत्तर : 1. (T), 2. (F), 3. (T), 4. (T), 5. (F)

(1) निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\int_0^1 x(x^2+6)\,dx$ (ii) $\int_2^3 (e^{2x}+e^x)\,dx$

(iii) $\int_1^4 \sqrt{xdx}$ (iv) $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(v) $\int_2^3 xe^x\ dx$ (vi) $\int_a^b \log\ xdx$

(vii) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ (viii) $\int_4^5 \frac{x}{1+x^2}\ dx$

Ans: (i) $\frac{13}{4}$ (ii) $e^6 - \frac{c^4}{2} + e^3 - e^2$

(iii) $\frac{14}{3}$ (iv) 2

(v) $e^2(2e-1)$ (vi) $b\log\left(\frac{b}{e}\right) - a\log\left(\frac{a}{e}\right)$

(vii) $\log 2$ (viii) $\frac{1}{2}\log\left(\frac{26}{17}\right)$

Ans: (i) $\frac{13}{4}$ (ii) $e^6 - \frac{c^4}{2} + e^3 - e^2$

(iii) $\frac{14}{3}$ (iv) 2

(v) $e^2(2e-1)$ (vi) $b\log\left(\frac{b}{e}\right) - a\log\left(\frac{a}{e}\right)$

(vii) $\log 2$ (viii) $\frac{1}{2}\log\left(\frac{26}{17}\right)$

(2) निम्न वक्रों के भीतर का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए

(i) $v = x^4, \quad 1 \le x \le 4$ $\left[\text{Ans. } \frac{31}{5}\right]$

(ii) $v = x^2 + 4x + 5 \quad -2 \le x \le 1$ [Ans.12]

(iii) $v = \frac{x^2}{2} + 1 \quad 0 \le x \le 4$ $\left[\text{Ans.} \frac{44}{3}\right]$

(iv) $y = 9 - x^2 \quad 1 \le x \le x$ $\left[\text{Ans. } \frac{28}{3}\right]$

(3) **y** का मान बताइए यदि –

(i) $\frac{dy}{dx} = 3e^{3x}$ [Ans. $y = e^3 x + c$]

(ii) $\frac{dy}{dx} = 5x^2 + 2$ $\left[\text{Ans. } y = \frac{5x^3}{3} + 2x + c\right]$

(iii) $\frac{dy}{dx} = x^2$ $\left[\text{Ans. } y = \frac{x^3}{3} + c\right]$

(iv) $\frac{dy}{dx} = (a + bx)^n$ $\left[\text{Ans. } y = \frac{1}{b(n+1)}(a+bx)^{n+1} + c\right]$

इकाई – 6 समाकलनन का आर्थिक प्रयोग

6.1 प्रस्तावना

पूर्व इकाई–5 में हमने समाकलन अवधारणा एवं निर्वचन पर चर्चा की थी। प्रस्तुत इकाई के अंतर्गत, हम समाकलनन के अर्थशास्त्र में प्रमुख अपयोगों की व्याख्या करेगें। समाकलनन की प्रक्रिया के द्वारा सीमान्त फलन, औसत फलन तथा कुल फलन ज्ञात कर सकते हैं।

6.2 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययनोंपरान्त पाठक –

1) कुल लागत/आगम ज्ञात करने की विधि जबकि सीमान्त लागत दिया हो।
2) निश्चित समाकलन
3) समाकलन क्षेत्रफल उपागम विधि
4) समाकलन के अर्थशास्त्र में विभिन्न उपयोग पर जानकारी प्राप्त करेगें।

समाकलन, अवकलन की उल्टी प्रक्रिया है विषय को समझाने के लिए कुछ उदाहरण (solved examples) दिये गये हैं, जो समाकलन का अर्थशास्त्र में प्रयोग, समझनें में सहायक होगें। अन्त में पाठकों से अनुरोध है कि अभ्यास के लिये प्रश्न तथा स्वपरीक्षण के द्वारा अपनी क्षमता का आकलन स्वयं करें।

6.3 लागत फलन

मूल रूप में लागत फलन तथा आगम विष्लेषण के विषय में हम जानते हैं। यहाँ इन पर संक्षिप्त चर्चा के उपरान्त हम समाकलन द्वारा इनका मान ज्ञात करने की विधि पर चर्चा करेगें।

निर्गत (output) तथा आगतों (inputs) के बीच फलनात्मक संबंधों को उत्पादन फलन कहते हैं – $Q = f(L, K)$ A जहाँ Q उत्पादन की मात्रा, तथा L एवम् K श्रम तथा पूँजी साधनों की मात्रायें हैं।

किसी दिये गये उत्पादन फलन में साधनों की मात्रा पर होने वाला व्यय उत्पादन की लागत का माप होग। इस प्रकार उतदन के आधार पर लागत–फलन को प्राप्त किया जा सकता है। अतः लागत–फलन एक व्युत्पन्न फलन (derived function) है, जिसे उत्पादन–फलन से प्राप्त किया जा सकता है।

उत्पादन–फलन की तरह लागत फलन के दो रूप हो सकते हैं – अल्पकालीन लागत फलन तथा दीर्घकालीन लागत फलन।

अल्पाकलीन लागतें (प्रति इकाई) – यद्यपि कुल लागत वक्र बहुत महत्वपूर्ण है पर प्रति इकाई लागत वक्र उपेक्षाकृत अधिक महत्वपूर्ण होता है, प्रमुख अल्पकालीन लागतें है –

1. औसत स्थिर लागत $(AFC)-\frac{TFC}{Q}$ जहाँ Q उत्पादन की मात्रा है।
2. औसत परिवर्तनशील लागत $(AVC)-\frac{TVC}{Q}$
3. औसत कुल लागत $(ATC)-\frac{TC}{Q}=\frac{TFC}{Q}+\frac{TVC}{Q}=AFC+AVC$
4. सीमान्त लागत $MC-\frac{dC}{dQ}$ जो कुल लागत का अवकलन है

6.4 आगम विश्लेषण

किसी फर्म द्वारा क्रय की गई वस्तुओं की कुल इकाइयों से जो आय प्राप्त होती है उसे कुल आय कहते हैं।

कुल आय (Total Revenue) = प्रति इकाई मूल्य $(P)\times$वस्तु की विक्रय की गई कुल इकाइयों की संख्या $(Q)\ =\ P\times Q$

कुल आय को यदि कुल विक्रय की गई इकाइयों से भाग दे दिया जाय तो प्राप्त राशि औसत आय के बराबर होगी।

औसत आय (AR) = कुल आय ÷ वस्तु की बिक्री की गई इकाइयों की संख्या।

या $AR=\frac{TR}{Q}=\frac{P.Q}{Q}=P$ (कीमत प्रति इकाई)

सीमान्त आय से तात्पर्य कुल आय की उस वृद्धि से है जो एक अतिरिक्त इकाई के विक्रय से प्राप्त होती है।

सीमान्त आय $(MR)=TR_n-TR_{n-1}$

यदि कुल आय फलन ज्ञात है, तो ऐसी स्थिति में, वस्तु की इकाइयों के सापेक्ष कुल आय की परिवर्तन दर को हम सीमान्त आय कहते हैं।

$$MR = \frac{d}{dQ}(TR) = \frac{d}{dQ}\{f(Q)\} = f'(Q)$$ ए

6.5 अर्थशास्त्र में निम्न प्रकार से समाकलनन का उपयोग किया जा सकता है

6.5.1 लागत फलन

अवकलन करते समय हमें कुल के मान द्वारा सीमान्त का मान ज्ञात होता है। चूँकि समाकलन अवकलन की विपरीत प्रक्रिया है, अतः सीमान्त का समाकलन करके हमें कुल का मान ज्ञात हो सकता है –

$$MC = \frac{dc}{dx}$$

तो $$c = \int MC.dx = \int \frac{dc}{dx} \times dx$$

नोट – अल्पकाल में कुल लागत कभी भी शून्य नही होती क्योंकि स्थित लागत कभी शून्य नहीं होती। दीर्घकाल में उत्पादन शून्य होने की दशा में स्थिर लागत शून्य हो सकती है।

6.5.2 आगम फलन

जिस प्रकार हम कुल लागत के अवकलन से सीमान्त लागत ज्ञात करते हैं उसी प्रकार कुल आगम के अवकलन से सीमान्त आगम ज्ञात कर सकते हैं, तथा समाकलन विधि से सीमान्त आगम के द्वारा कुल आगम का मान ज्ञात कर सकते हैं। यदि, सीमान्त आगम $(MR) = \frac{dR}{dx}$ के हैं तो, $TR = \int MR.dx = \int \frac{dR}{dx} \times dx$ तथा $X = 0$ होने की स्थिति में $TR = 0$ होग।

(i) कुल उपभोग (TC) का मान भी सीमान्त उपभोग (MC) के समाकलन द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

$$c = \int \frac{dc}{dy} \times dy$$

(ii) कुल उपयोगिता (Tu) का मान सीमान्त उपयोगिता (Mu) के समाकलन द्वारा निकाला जा सकता है

$$Tu = \int \frac{du}{dx} \times dx$$

(iii) कुल उत्पादन (TP) का मान सीमान्त उत्पादन (MP) के समाकलन द्वारा ज्ञात कर सकते हैं –

$$TP = \int \frac{dP}{dq} \times dq$$

6.5.3 लाभ

यदि हमें किसी फर्म के अधिकतम लाभ का मान ज्ञात करना है, तबकि हमारे सीमान्त लागत एवं सीमान्त आगम फलन दिये हुए हैं – तो

अधिकतम लाभ = कुल आगम – कुल लागत

or $\pi = TR - TC$

समाकलन द्वारा $TR = \int \frac{dR}{dx} \times dx$

$$TC = \int \frac{dc}{dx} \times dx$$

$$\pi = \int \frac{dR}{dx} \times dx - TP = \int \frac{dc}{dx} \times dx$$

6.5.4 पूंजी संचयन

पूंजी के वास्तविक स्टॉक में होने वाली वृद्धि को पूंजी संचयन कहते हैं। पूंजी संचयन की दर को $\frac{dk}{dt}$ द्वारा लिखते हैं जहाँ k समय का फलन है।

पूंजी संचयन की दर वही है जो निवल निवेश (It) किसी समय बिन्दु पर होता है।

$$\frac{dk}{dt} = I(t)$$

यदि कुल पूंजी स्टॉक का मान निकालना हो तो पूंजी संचयन की दर $\frac{dk}{dt}$ का समाकलन ज्ञात करना होगा –

$$k(t) = \int I(t)(dt) = \int \frac{dk}{dt} \times dt$$

$$k(t) = \int dk$$

6.5.5 पेरेटो का आय वितरण का सिद्धान्त

पेरेटो का आय वितरण का सिद्धान्त V. Pareto द्वारा निम्न आय वितरण का सिद्धान्त प्रतिपादित किया गया –

एक दिये हुये जनसंख्या के आकार ‘a’ में ‘N’ व्यक्ति जिनकी आय ‘X’ से अधिक है –

$N = aX^{-b}$ जहाँ ‘b’ (population parameter) जनसंख्या प्राचल है, जिसका मान 1.5 है।

(i) कुल व्यक्ति जो y_1 और y_2 आय के स्तर के अन्तर्गत है –

$$= \int_{y_1}^{y_2} ax^{-b}\,dx = a\left[\frac{x^{-b}+1}{-b+1}\right]_{y_1}^{y_2}$$

$$= \frac{a}{1-b}\left[y_2^{1-b} - y_1^{1-b}\right]$$

(ii) कुल आय जो y के स्तर से ऊपर है

जब $N = aX^{-b}$ तो

$$dN = a(-b)^{x-b-1}\,dx = abx^{-b-1}\,dx\,.$$

मान लें कि, $Ndx = dN = abx^{-b-1}\,dx$ जहाँ dN व्यक्ति संख्या में छोटा परिवर्तन है, जबकि आय में वृद्धि हुई हो।

हमें –dN प्राप्त होता है क्योंकि आय के स्तर में वृद्धि होने पर व्यक्ति संख्या कम होती जाती है, कुल आय का स्तर X –

$$xNdx = abx^{-b}.dx$$

कुल आय ‘y’ के स्तर के ऊपर $= \int_{y}^{\infty} x.Ndx$ होगी

$$= \int_{y}^{\infty} abx^{-b}\,dx = \frac{ab}{y-1}y^{1-b}$$

6.6 अर्थशास्त्र में समाकलन का प्रयोग

⇒ समाकलनन की प्रक्रिया द्वारा हम सीमान्त फलन ज्ञात होने पर कुल फलनों को ज्ञात कर सकते हैं।

जैसे सीमान्त लागत $= \frac{d}{dq}$ (कुल लागत) होता है

कुल लागत $= \int$ (सीमान्त लागत $\frac{d}{dq}$)

$q =$ कुल उत्पादन है।

⇒ समाकलन – क्षेत्रफल उपागम विधि द्वारा हम उपभोक्ता की बचत को मांगा वक्र के द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

⇒ यदि हमें X-axis के ऊपर किसी वक्र के नीचे, किसी तंदहम का क्षेत्रफल ज्ञात करना हो तो निश्चित समाकलन द्वारा निकाला जा सकता है। पहले हम सीमान्त फलन ज्ञात होने पर कुल फलनों को ज्ञात करने की विधि कुछ उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करेगें।

6.6.1 सीमान्त फलन से कुल फलन ज्ञात करना –

(i) यदि $MC = 2ax + b$ तो $TC = \int (2ax + b)dx$

$$= ax^2 + bx + c$$

(ii) यदि $MR = -2\alpha x + \beta$ तो

$$= -\alpha x^2 + \beta x + c.\ TR = \int (-2\alpha x + \beta)dx$$

(iii) यदि $MPS = f(y)$ तो $S = \int f(y)dy.$

उपरोक्त उद्धरणों द्वारा, सीमान्त फलन ज्ञात होने की स्थिति में कुल फलन का मान निकालना स्पष्ट किया है।

उदाहरण – यदि सीमान्त आय फलन $MR = \frac{3}{20}x^2 - 10x + 100$ तो $X = 10$ पर कुल आय ज्ञात कीजिए।

हल $X = 10$ पर कुल आय ज्ञात करने से पूर्व हम कुल आय फलन को ज्ञात करते हैं। तत्पष्चात, कुल आय फलन में $X = 10$ रखने पर हमें 10 इकाई विक्रय की कुल आय ज्ञात हो जाती है जब –

$$MR = \frac{3}{20}x^2 - 10x + 100$$

$$TR= \int(MR = \frac{3}{20}x^2 - 10x + 100)\, dX= X^3/20-5X^2+100X$$

$TR = p.X.$ अर्थात् X का मान शून्य होने पर कुल आय भी शून्य होती है। TR फलन में अचर राशि अनुपस्थित होती है। इस कारण समाकलज फलन में समाकलन अचर 'C' अनुपास्थित है।

अब $X = 10$ रखने पर

$$TR= 10^3/20 - 5.(10^2) +100(10)$$

$$=1000/20 - 5(100)+1000$$

$$= 50-500+1000 \quad = 550$$

उदाहरण : यदि एक उत्पादक का सीमान्त लागत फलन $MC = x^2 - 14x + 111$ है तथा 3 इकाई की कुल उत्पादन लागत 379 रू0 है तो उत्पादक का कुल लागत फलन ज्ञात कीजिए।

हल – उत्पादक का सीमान्त लागत फलन,

$$MC= X^2 - 14X+111$$

अतः $TC= \int(X^2 - 14X+111)\, dX$

$$= X^2/3 - 14(X^2/2 + 111X +C)$$

$$TC = X^2/3 - 7X^2+111X+C$$

6.7 क्षेत्रफल समाकलन द्वारा उपभोक्ता का अतिरेक ज्ञात करना

उदाहरण – एक व्यक्ति का मांग फलन $P = 18 - \frac{x}{3}$ हैं। यदि व्यक्ति वस्तु की 30 इकाइयाँ क्रय करे तो व्यक्ति का उपभोक्ता अतिरेक (Consumer's Surplus) ज्ञात कीजिये।

हल – उपभोक्ता अतिरेक से तात्पर्य उस कीमत अन्तर से है, जो उपभोक्ता वस्तु की एक निश्चित मात्रा के लिये चुकाने को तत्पर है, तथा जो कीमत वह वास्तव में चुकाता है। उपभोक्ता वस्तु की 30 इकाइयों के लिये जो कुल कीमत देने को तत्पर है, वह $X = 30$ से $X = 30$ इकाइयों तक उत्तरोक्तर उच्चतम कीमतों के योग के बराबर होगी। इस राषि को निम्न छायांकित क्षेत्रफल Chart-1 (Shaded Area) OBCD द्वारा प्रदर्शित किया गया है। परन्तु उपभोक्ता वास्तव में 30 इकाई क्रय करने पर जो कुल कीमत अदा करता है, वह आयत OACD के क्षेत्रपल के बराबर है।

$X = 30$ पर वस्तु की कीमत ज्ञात करने के लिये हम मांग फलन के समीकरण में $X =$ 30रखतेहैं–

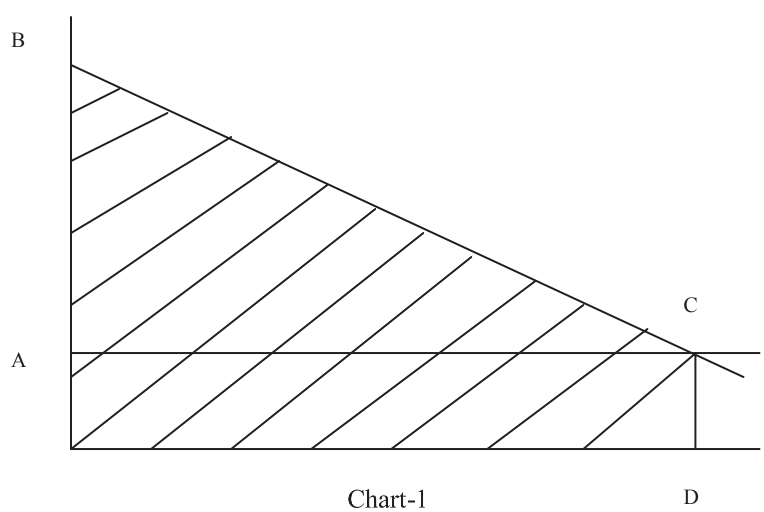


Chart-1

6.7.1 उपभोक्ता का अतिरेक

इस सिद्धान्त का प्रतिपादन प्रो0 मार्शल द्वारा किया गया है, किसी वस्तु से वंचित रहने की अपेक्षा उपभोक्ता जो अधिकतम कीमत उसके लिये चुकाने को तैयार है, और जो कीमत वह वास्तव में चुकाता है, इन दोनों कीमतों के अन्तर को ही उपभोक्ता की बचत कहते हैं।

मार्शल की परिभाषा– –'उपभोक्ता किसी वस्तु से वंचित रहने की अपेक्षा उस वस्तु के लिए वास्तव में दिये गये मूल्य की अतिरिक्त जो अधिक मूल्य देने को तैयार हो जाता है, वह इस अधिक संतुष्टि की आर्थिक माप है और इसको उपभोक्ता की बचत कहा जाता है।'

उपयोगिता विश्लेषण के अन्तर्गत, धन की सीमान्त उपयोगिता को स्थिर मानकर सभी उपभोक्ताओं का एक समान उपयोगिता फलन मान लिया जाता है। मांग वक्र द्वारा हम किसी वस्तु की मांग (X) एक दी गयी कीमत (p) पर ज्ञात करने हैं।

यदि $p = f(X)$ वस्तु का मांगा फलन है, तथा उपभोक्ता X_0 मात्रा का क्रय P_0 कीमत पर करता है तो उसका कुल व्यय–

$$TE = P_0 x_0 \text{ होग}$$

कुल उपभोक्ता P_0 से अधिक कीमत देने की तैयार, होंगे, यदि उपभोक्ता X मात्रा क्रय कर चुका है, तो वह dX मात्रा को fX (dX) कीमत पर क्रय करने को तैयार होग। इस प्रकार उपभोक्ता द्वारा किया गया कुल व्यय X_0 मात्रा के लिये $\int_0^{x_0} f(x)dx$ के बराबर होग।

जहाँ उपभोक्ता अतिरेक–

$$= \int_0^{x_0} f(x)\,dx - p_0\, x_0.$$

इसी प्रकार हम निश्चित समाकलन की सहायता से उपभोक्ता अतिरेक का क्षेत्रफल निकाल सकते हैं।

$$P = 18 - \frac{x}{3}$$

यदि $x = 30$ तो $P = 18 - \frac{30}{3} = 18 - 10.$

$$= 8 \text{ रू0 प्रति इकाई}$$

अतः 30 इकाई वस्तु के लिये उपभोक्ता जो कीमत देने को तत्पर है, वह छायांकित क्षेत्रफल OBCD के बराबर है, परन्तु

क्षेत्रफल BODC $= \int_0^{30}\left(18-\frac{x}{3}\right)dx = \left[18x-\frac{x^2}{6}\right]_0^{30}$

$$= \left[18x30-\frac{30^2}{6}\right]-\left[18x0-\frac{0^2}{6}\right]$$

$$= \left[540-\frac{900}{6}\right] - [0-0]$$

$$= [540 - 150] - [0] = 390 \text{ रू0}$$

अतः उपभोक्ता का अतिरेक $= 390 - 240$

$= 150$ रू0

उपभोक्ता अतिरेक को हम निम्न प्रकार भी व्यक्त कर सकते हैं–

$$CS = \int_0^x P(x)dx-P.x.$$

जहाँ $CS,$ उपभोक्ता का अतिरेक है, तथा $P(x)$ मात्रा के रूप में उपभोक्ता का मांग फलन है।

6.7.2 निश्चित समाकलन

निश्चित समाकलन एक महत्वपूर्ण दृष्टिकोण है, गणितीय रूप से यौगिक अभिव्यक्ति तथा अरेखीय शब्दावली मे वक्र के भीतर के क्षेत्रफल को व्यक्त करता है। जहाँ अनिश्चित समाकलनन को कोई निश्चित अंकात्मक मान नही होता। वही निश्चित समाकलन का एक निश्चित अंकात्मक मान होता है। यदि $f(x)$ सीमा (a,b) के भीतर एक सतत् फलन है (सीमा ˙ और b के भीतर)

$$\int_a^b f(x).dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

जहाँ $\int f(x)dx = f(x) + c$

इसमें a को निचली सीमा और b को ऊपरी सीमा कहते हैं। इसके आधार पर –

$$\int_1^2 x^3dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

और $\int_0^1 e^x dx = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0.$

$$= e - 1.$$

किसी वक्र के भीतर के क्षेत्रफल के रूप में हम निश्चित समाकलन को व्यक्त कर सकते हैं। इसे ही समाकलनन का आधारभूत प्रमेय भी कहते हैं। मान लेते हैं कि f(X) एक सतत फलन है जिसे वक्र के रूप में दिखा रहे हैं। अन्तराल (a,b) पर इस वक्र के भीतर का क्षेत्रफल प्राप्त करने के लिये एक छोटी पट्टी (strip) जिसकी चौड़ाई (width) $\Delta\, x_1 (x_2 - x_1)$ को लेते हैं। इसकी ऊँचाई $g(x_1)$ है।

इस पट्टी का क्षेत्रफल $f(x_1).\ \Delta x_1$ होगा ।

इसी तरह यदि हम पट्टियाँ लें जिसकी चौड़ाई $\Delta x_i (i=1,2,....,\sim)$ हो तथा संगत ऊँचाई $f(x_i)(i=1,2,....,\sim)$ हो तो हम छोटे आयत प्राप्त करेगें जिसमें प्रत्येक का क्षेत्रफल $f(n_i)\Delta x_i \;\; i=1,2,...,\sim$ होगा।

इस क्षेत्रफल का योग $\sum_{i=1}^{\sim} f(x_i),\ \Delta x_i$ होगा।

वक्र के भीतर के वास्तविक क्षेत्रफल को व्यक्त करने के लिये आवश्यक है कि आयात की चौड़ाई बहुत सूक्ष्म है और यह तभी सम्भव है जब ~ बहुत बड़ा हो या ~ अनन्त की तरफ अग्रसर हो। इस स्थिति में आयत बहुत पतला होता जाएगा (लगभग एक सीधी रेखा की तरह) और अन्तराल (a,b) के लिये वक्र के भीतर के क्षेत्रफल को एक सीमा के रूप में लिख सकेंगें।

$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\sim} f(x_1).\Delta x_i$ इस रूप में प्रस्तुत क्षेत्रफल खण्डित योग है। यदि हम सीमा के रूप में प्रस्तुत करें तब सतत् प्रकृति का होगा । अर्थात् –

$$A = \int_a^0 f(x).dx$$

उपर्युक्त दोनों रूप में समानता पर ध्यान देना चाहिये। खण्डित संख्याओं $f(x_i)$ और Δx_i का fX और dX वास्तव में एक सतत् उपभाग है। इस स्थिति में खण्डित योग का

चिन्ह सतत् योग के चिन्ह $\int$ द्वारा प्रतिस्थापित हो जाता है। इस प्रकार वक्र $y=f(x)$ का क्षेत्रफल दो सीमाओं (a,b) के लिये निश्चित समाकलन के रूप में लिखा जा सकता है।

$$\text{क्षेत्रफल} \quad abBA = \int_a^b f(x)x = F(b) - F(a)$$

6.8 उत्पादक का अतिरेक

जिस प्रकार हम उपभोक्ता का अतिरेक धन की उपयोग्तिा स्थिर होने की दशा में ज्ञात करनते हैं उसी प्रकार, उत्पादक अतिरेक में भी हम यही मानते हैं कि धन की उपयोग्तिा समान है तथा सभी उत्पादकों के उत्पादन फलन एक समान है।

यदि $p=f(x)$ पूर्ति फलन है, तथा p बाजार कीमत है तो मान लेते हैं कि उत्पादक X_0 मात्रा विक्रय करता है p_0 कीमत पर यह संतुलन कीमत है तथा उत्पादक का आगम =

$$R = p_0 x_0$$

जहाँ बाजार में अन्य उत्पादक p_0 कीमत से कम कीमत पर विक्रय करेगें तो उत्पादक जो X मात्रा का विक्रय कर चुका है अब dX मात्रा का विक्रय $f(X)$ कीमत पर करेगा। अतः क॰ से कुल आगम बराबर होगा $f(X)\,dX$ के तथा कुल आगम X के विक्रय द्वारा –

$$\int_0^{x_0} f(x)\,dx$$

$$\text{उत्पादक अतिरेक} = p_0x_0 - \int_0^{x_0} f(x)\,dx$$

उत्पादक अतिरेक को निश्चित समाकलन द्वारा भी ज्ञात किया जा सकता है –

उत्पादक अतिरेक $= OP_0TX_0$ का कुल क्षेत्रफल $- OS_1TX_0$ वक्र का क्षेत्रफल = पूर्ति वक्र का हिस्सा P_0S_1T $= p_0x_0 - f(x)\,dx$

$$= p_0x_0 - \int_0^{x_0} p.dx$$

उदाहरण – 9. यदि सीमान्त आगम फलन $MR = \frac{ab}{(x-b)^2} - C$ तो समाकलन द्वारा कुल आगम फलन ज्ञात कीजिए। यदि एक स्थिति में TR = 0 जब X = 0 हो तो सिद्ध कीजिए कि $AR = \frac{a}{b-x} - C$ के हैं।

$$MR = \frac{dR}{dx} = \frac{ab}{(x-b)^2} - C$$

दोनों तरफ समाकलन करने पर (X के लिये)

$$dR = \frac{ab}{(x-b)^2} dx - cdx$$

$$\int dR = ab \int \frac{dx}{(x-b)^2} - c \int dx$$

$$R = ab \frac{(x-b)^{-1}}{-1} - cx + k$$

हमें पता है कि $X = 0$ तथा $R = 0.$

$$0 = \frac{ab(-b)^{-1}}{1} + 0 + k$$

$$0 = -\frac{ab}{b} - 0 + k$$

or $\quad k = -a$

अतः

$$R = \frac{-ab}{x-b} - cx - a$$

औसत फलन $= \frac{TR}{x} = -\frac{ab}{x(x-b)} - C - \frac{a}{x}$

$$AR = P = \frac{-ab}{x(x-b)} - \frac{a}{x} - C = \frac{-ab - ax + ab}{x(x-b)} - C$$

$$= \frac{-ax}{x(x-b)} - C = \frac{a}{x-b} - C = \frac{a}{b-x} - C$$ अतः सिद्ध

6.9 समाकलन का अर्थशास्त्र में प्रयोग

उदाहरण : 1

1. जब सीमान्त लागत फलन $MC = 2+5e^x$ (a) दिया हो तो (a) C का मान ज्ञात कीजिए जब $C(o) = 100$ (b) औसत लागत ज्ञात कीजिए (c) C, MC, AC का मान X =60 पर ज्ञात कीजिए ।

हल $$\frac{dc}{dx} = 2 + 5e^x$$

$$dc = 2\,dx + 5e^x dx$$

$$\int dc = 2\int dx + 5\int e^x\,dx$$

$$c = 2x + 5e^x + k$$

$$x = 0\ C(o) = 100$$

$$100 = 5e^o + k \text{ या } k = 95$$

$$C = 2x + 5e^x + k$$

$$AC = \frac{C}{x} = 2 + \frac{5e^x}{x} + \frac{95}{x}$$

जब $X = 0$ तो

$$AC = 2 + \frac{5e^{60}}{60} + \frac{95}{60}$$

$$MC = 2 + 5e^{60}.$$ (उत्तर)

उदाहरण : 2 यदि X इकाइयों सीमान्त लागत फलन $\frac{a}{\sqrt{ax+b}}$ तथा यदि लागत शून्य है तो x का कुल लागत फलन ज्ञात कीजिए ।

हल :

$$\frac{dc}{dx} = MC = \frac{a}{(ax+b)^{1/2}}$$

$$dc = a(ax+b)^{-1/2}\,dx$$

समाकलित करते हुए,

$$\int dc = a\int (ax+b)^{-1/2}\ dx$$

$$c = a.\frac{(ax+b)^{1/2}}{\frac{1}{2}\times a} + k$$

$$c = 2(ax+b)^{1/2} + k$$

यदि $C(o) = 0$ दिया है तो

$$0 = 2(b)^{1/2} + k$$

$$k = -2\sqrt{b}.$$

$$C = 2(ax+b)^{1/2} - 2\sqrt{b}.$$

$$= 2\left[(ax+b)^{1/2} - (b)^{1/2}\right]$$ उत्तर

उदाहरण रू 3 लागत फलन ज्ञात कीजिए जब सीमान्त लागत फलन

$$MC = 1000 - 20x + x^2$$

जहाँ x उत्पादित इकाई हैं तथा स्थिर लागत Rs. 9000 है–

हल : $\frac{dc}{dx} = 1000 - 20x + x^2$

$$\int dc = 1000\int dx - 20\int x\ dx + \int x^2\ dx$$

$$C = 1000x - \frac{20x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + k.$$

$$x = 0 \qquad c = 9000$$

$$9000 = 0 - 0 + k.$$

$$k = 9000$$

$$c = 9000 + 1000x - \frac{20x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$ (उत्तर)

उदाहरण : 4 यदि सीमान्त आगम फलन x इकाई के लिये $MR = \frac{6}{(x+2)^2} + 5$ है तो कुल आगम फलन तथा मांग फलन ज्ञात कीजिए –

हल : सीमान्त आगम $MR = \frac{6}{(x+2)^2} + 5$

$$R = \int MR\, dx = \int 6(x+2)^{-2}\, dx + 5\int dx$$

$$= \frac{6(x+2)^{-1}}{-1} + 5x + k.$$

$$x = 0 \quad R = 0.$$

$$0 = \frac{-6}{x+2} + 5x + k$$

$$0 = \frac{-6}{2} + 0 + k$$

$$k = 3$$

$$R = \frac{-6}{x+2} + 5x + 3$$

$$= 3 - \frac{6}{(x+2)} + 5x$$

$$= \frac{3x+6-6}{x+2} + 5x$$

$$= \frac{3x}{x+2} + 5x$$

मांग फलन $AR = P = \frac{R}{x}$

$$P = \frac{3}{x+2} + 5$$ उत्तर

उदाहरण 5 – ABC लिमिटेड कम्पनी वस्तु का सीमान्त आगम फलन $MR = 20x - 2x^2$ हैं, इस फर्म का अधिकतम लाभ पर उत्पादन, कुल लाभ इष्टतम उत्पादन पर ज्ञात कीजिए।

हल – लाभ अधिकतम उत्पादन, $MR = MC$

$$20 - 2x^2 = 81 - 16x + x^2$$

$$-3x^2 + 36x - 81 = 0$$

$$3x^2E - 36x + 81 = 0$$

$$x^2 - 36x + 81 = 0$$

$$x^2 - 12x + 27 = 0$$

$$(x-3)\ (x-9) = 0$$

$x = 3$ तथा $x = 9$

लाभ अधिकतम करने के लिये –

$\frac{d}{dx}[MR - MC] < 0$ जहाँ $x = 3, 9$

$x = 3$ पर $\frac{d}{dx}[MR - MC] =$

$-6x + 36 = -18 + 36 = 18 > 0$ तथा

$x = 9$ पर $\frac{d}{dx}[MR - MC] = -6x + 36 = -54 + 36$

$= -18 < 0.$

अतः लाभ अधिकतम $x = 9$ पर $x = 9$ पर अधिकतम लाभ

$$= \int_0^9 (MR - MC)\,dx$$

$$= \int_0^9 (-3x^2 + 36x - 81)\,dx$$

$$= \left[-x^3 + 18x^2 - 81x\right]_0^9$$

$$= -(9)^3 + 18(9)^2 - 81(9)$$

$= 0$ उत्तर

उदाहरण : 6 एक वस्तु का मांग फलन $p = 10 - 29.$

इसका उपभोक्ता अतिरेक ज्ञात कीजिए जब

(i) $p_0 = 0$ (ii) $p_0 = 1$ (iii) $p_0 = 5$.

हल p = 10-29. यदि $p_0 = 0$ तो q = 5.

$$C.S. = \int \text{मांग फलन} - p \times q$$

$$= \int (10-2q)\,dq - p \times q$$

$$= \int_0^5 (10-2q)\,dq - 0 \times 5$$

$$= \left[10q - q^2\right]_0^5 - 0$$

$$= [50 - 25]$$

$$= 25. \quad \text{उत्तर}$$

(ii) $p_0 = 1;\ 1 = 10 - 2q;\ q = q/2 = 4\frac{1}{2}$

$$C.S. = \left[10q - q^2\right]_0^{q/2} - 1 \times \frac{9}{2}$$

$$= \frac{10 \times 9}{2} - \frac{81}{4} - \frac{9}{2}.$$

$$= \frac{180 - 81 - 18}{4}$$

$$= \frac{81}{4} \quad \text{उत्तर।}$$

(iii) $p_0 = 5;\quad t = 10 - 2q$

$$2q = 5 \qquad q = 5/2$$

$$C.S. = \left[10q - q^2\right]_0^{5/2} - 5 \times \frac{5}{2}$$

$$= 10 \times \frac{5}{2} - \frac{25}{4} - \frac{25}{2}$$

$$= \frac{100 - 25 - 50}{4} = \frac{25}{4} \quad \text{उत्तर।}$$

उदाहरणः 7 यदि वस्तु के मांग एवं पूर्ति फलन निम्न है –

$$pd = 18-2x-x^2$$

$$P_s = 2x-3$$

तो उपभोक्ता अतिरेक तथा उत्पादक अतिरेक ज्ञात कीजिए।

संतुलन कीमत पर $pd = ps$.

अतः $18-2x-x^2 = 2x-3$

$\therefore x = 3$

$X = 3$ तथा $p = 3$ पर

(C.S.) उपभोक्ता अतिरेक $= \int_0^3 (18-2x-x^2)\, dx - 3\times 3$

$$C.S. = \left[18x - x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 - 9$$

$$C.S. = [54-9-9] = 27 \text{ units}$$

(b) उत्पादक अतिरेक $3\times 3 - \int_0^3 (2x-3)\,dx$

$$P.S. = 9 - \left[x^2 - 3x\right]_0^3$$

$$= 9-[9-9] = 9-9+9 = 9 \text{ units.}$$

उदाहरणरू 8. यदि शुद्ध प्रतियोग्िता में मांग, पूर्ति फलन क्रमशः दिये हों –

$$p_d = \frac{8}{x+1} - 2 \quad P_s = \frac{1}{2}(x+3)$$

तो उपभोक्ता अतिरेक एवं उत्पादक अतिरेक ज्ञात कीजिए –

संतुलन कीमत पर $p_d = p_s$

अतः $$\frac{8}{x+1} - 2 = \frac{x+3}{2}$$

$$\frac{8-2x-2}{x+1} = \frac{x+3}{2}$$

$$\frac{6-2x}{x+1}=\frac{x+3}{2}$$

$$12-4x \;=\; x^2+4x+3$$

$$x^2+4x+4x-9=0$$

$$x^2+8x-9=0$$

$$x^2+9x-x-9=0$$

$$x(x+9)-1(x+9)=0$$

$$x=-9,\;\; x=1$$

$p=2$ at $X=1$. क्योंकि $X=9$ संभव नहीं

उपभोक्ता अतिरेक $(C.S.)=\int_0^1\left(\frac{8}{x+1}-2\right)dx-2\times1$

$$C.S.=\left[8\log(x+1)-2x\right]_0^1-2$$

$$C.S.=8\log2-2-2$$

$C.S.=8\log2-4$ (उत्तर)

उत्पादक अतिरेक $(P.S.)=2\times1-\int_0^1\frac{x+3}{2}dx$

$$P.S.=2\times1-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}3x\right]_0^1$$

$$P.S.=2\times1-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\right]$$

$$P.S.=2-\frac{7}{4}$$

(उत्तर) $P.S.=\frac{1}{4}$ इकाई

6.10 चिन्ह

यदि वक्र $y = f(X)$ अन्तराल (a, b) के लिये धनात्मक है और वक्र X-अक्ष से ऊपर है तो धनात्मक होग। इसके विपरीत यदि $y=f(X)$ अन्तराल (a,b) के लिये ऋणात्मक है और वक्र अक्ष के नीचे है तो $\int_a^b f(x).dx$ ऋणात्मक होग। यदि $y = f(X)$ चिन्ह परिवर्तित करता है। (निश्चित अन्तराल) में तथा वक्र X-अक्ष को पार करता है तो एसी स्थिति में कुल क्षेत्रफल धनात्मक क्षेत्रफल और ऋणात्मक का बीजगणितीय योग होगा।

6.11 निश्चित समाकलन – विशेषताएँ

निश्चित समाकलन की कुछ महत्वपूर्ण विषेषताएँ होती हैं जो निम्न हैं –

(i) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)\, dx$

(ii) $\int_a^a f(x)\, dx = 0$

(iii) $\int_a^d f(x)dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^d f(x)(a < b < c < d)$

(iv) $\int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)\, dx$

(v) $\int_a^b tf(x)dx = f\int_a^b f(x)\, dx$

(vi) $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

6.12 सारांश

$\Rightarrow$ समाकलन विधि के प्रयोग से कुल लागत / आगम तथा औसत लागत / आगम का मूल्य ज्ञात किया जा सकता है, जबकि सीमान्त लागत / आगम का मूल्य दिया हो।

$\Rightarrow$ आंशिक भिन्न द्वारा समाकलन – यदि उचित भिन्न में हर की घात दो या दो से अधिक हो, तथा हर का गुणनखण्ड किया जा सके तो उसे उचित भिन्न में परिवर्तित कर के उनका समाकलन किया जा सकता है।

$\Rightarrow$ आंशिक भिन्न के प्रमुख तथ्य देखें –

$\Rightarrow$ यदि सीमान्त लागत $= \frac{d}{dq}$ हो समाकलन द्वारा कुल लागत $= \int \left(\frac{d}{dq} \right)$ जहाँ

$q =$ कुल उत्पादन है।

सीमान्त आगम $= \frac{d}{dR}$ तो कुल आगम $= \int \left(\frac{d}{dR} \right)$

$\Rightarrow$ निश्चित समाकलन के द्वारा हम वक्र के भीतर के क्षेत्रफल को व्यक्त करते हैं।

$\Rightarrow$ निश्चित समाकलन का निश्चित अंकात्मक मान होता है। निश्चित समाकलन की विशेषताएँ देखें –

$\Rightarrow$ समाकलन का अर्थशास्त्र में प्रयोग सीमान्त लागत द्वारा कुल लागत; सीमान्त उपभोग द्वारा कुल उपभोग; सीमान्त उत्पादन द्वारा कुल उत्पादन ज्ञात करने के लिये किया जाता है।

6.13 शब्दावली

निश्चित समाकलनन	.	Definite Integral
सीमान्त	.	Marginal
पूंजी संचयन	.	Capital Formation
फलन	.	Function
आगम	.	Revenue
क्षेत्रफल समकलज	.	Area Integral

6.14 अभ्यास के लिये प्रश्न

Part-1 I- वस्तुनिष्ठ प्रश्न :

i) यदि MC=2aX+b हो तो TC बराबर होगा –

1- $2aX+b/X$ 2- $4a^2X+0$

3- $aX+1$ 4- aX^2+bX+c

ii) यदि एक व्यक्ति का मांग फलन $P=18-X/3$ है तो 30 इकाई क्रय करने पर C.S. होगा –

1- 120 2- 240

3-380 4-कोई नहीं

iii) यदि $AC=100-2X-0.5X^2$ के तो $(X=4)$ TC बराबर होग.

1- $100-4X+1.5X^2$ 2-$100X-2X^2+0.5X^3$

3- $200-4X-X^2$ 4- कोई नहीं

iv) यदि P_1 P_2 तथा Q_1 Q_2 दिये ग्ये हैं तो पूर्ति रेखा का समीकरण क्या होग.

1- $P_1+P_2=Q_1+Q_2/ Q_1+Q_2$ 2- $P_1-P_2 = P_2-P_1/Q_2-Q_1(Q_1-Q_2)$

3- P_1/Q_1 XQ_2/P_2 4. को ई नहीं

v) यदि उपभोग फळन दिया ग्या हो तो हम .... का मान निकाळ सकतें हैं.

1- MPC 2-MPC & MPS

3- MPS 4- कोई नहीं

उत्तर : 1-(iv) 2-(ii) 3-(ii) 4-(ii) 5-(ii)

II] सही (T) अथवा गलत (F) चिन्हित करें :

i) यदि उपभोक्ता का मांग वक्र दिया गया हो तो एक निश्चित मात्रा क्रय करनें पर C.S. ज्ञात की जा सकती है ।

ii) MC का समाकलनन MR है ।

iii) यदि mps दिया गया हो तो TC ज्ञात की जा सकती है ।

iv) यदि MR का मान $-2aX+b$ तो $TR=-aX^2 +bX+c$ होगा ।

v) समाकलनन का मान निश्चित होने के कारन इसे निश्चित समाकलनन कहतें हैं

उत्तर : 1-(T) 2-(F) 3-(F) 4-(T) 5-(T)

(1) निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\int_{2}^{3}(e^{2n}+e^{n})\,dx$ (ii) $\int_{1}^{4}\sqrt{xdx}$

(iii) $\int_{1}^{4}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ (iv) $\int_{2}^{3}xe^{x}\,dx$

(v) $\int_{a}^{b}\log ndx$ (vi) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x}$

(vii) $\int_{4}^{5}\frac{x}{1+x^{2}}\,dx$

(2) निम्न वक्रों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(i) $y = x^{4} \quad 1 \le x \le 4$

(ii) $y = x^{2}+4x+5 - 2 \le x \le 1.$

(iii) $y = \frac{x^{2}}{2}+1. \quad 0 \le x \le 4$

(iv) $y = 9 - x^{2} \quad 1 \le x \le x$

(3) y का मान बताइए यदि –

(i) $\frac{dy}{dx} = 3e^{3x}$

(ii) $\frac{dy}{dx} = 5x^{2}+2$

(iii) $\frac{dy}{dx} = x^{2}$

(iv) $\frac{dy}{dx} = (a+bx)^{\sim}$

Part.2 **अभ्यास के लिये प्रश्न**

प्र0 1 यदि मांग फलन $p = e^{-X}$ तथा $p = 0.5$ तो उपभोक्ता का अतिरेक ज्ञात कीजिए।

उत्तर 1 – $\frac{1}{2}[1-\log e^2]$ इकाई

प्र0 2 . यदि मांग एवं पूर्ति फलन दिये हैं क्रमशः $pd = (6\text{-}X)^2$ तथा $P_s = 14+X$ तो एकाधिकार के अन्तर्गत उपभोक्ता अतिरेक ज्ञात कीजिये।

उत्तर 2 . $X = 1$ $C.S. = \frac{16}{3}$ इकाई

प्र0 3 . यदि सीमान्त आगम फलन दिया है –

$$MR = \frac{4}{(2x+3)^2} - 1.$$

तो सिद्ध कीजिए कि औसत आगम फलन बराबर होगा

$$= AR = \frac{4}{6x+9} - 1$$ के।

प्र0 4 . यदि सीमान्त लागत MC = 3X+4 है तथा कुल स्थिर लागत = Rs. 10 तथा p = 40 प्रति इकाई है तो ज्ञात कीजिए –

(i) कुल लागत फलन

(ii) आगम फलन

(iii) अधिकतम लाभ

उत्तर 4 . [X = 12, अधिकतम लाभ =2-6]

प्र0 5 . एकाधिकार के अन्तर्गत कीमत एवं उत्पादन इकाई का निर्धारण मांग फलन द्वारा किया जाता है। यदि मांग फलन (लाभ अधिकतम एकाधिकार में) p = $274 - X^2$ तथा MC = 4+3X, तो उपभोक्ता अतिरेक ज्ञात कीजिए।

उत्तर 5. [C.S. = 486 इकाई ,

प्र0 6– यदि सीमान्त लागत MC = 20000-320 X – $3X^2$ जहाँ X उत्पादन की इकाई है, तथा स्थिर लागत = 18,000 तो ज्ञात कीजिए –

(i) लागत फलन

$$30(i)\ [4800x+160x^2-x^3-18000]$$

(ii) लाभ फलन

$30(ii)\ [4800x + 160x^2 - x^3 - 18000]$

(iii) आगम फलन

$30(iii)\ [6800x]$

(iv) अधिकतम लाभ पर उत्पादन इकाई

30 (iv) $[X = 120]$

(v) लाभ जहाँ $X = 120$ हो।

$30(v)\ [Rs = 1746000]$

प्र0 7 यदि $MC = 6 + 10x - 6x^2$ है, तो कुल लागत एवं औसत लागत फलन ज्ञात कीजिए जबकि प्रति इकाई कुल लागत Rs. 12 है ।

$30.7\ [TC = 6x + 5x^2 - 2x^3 + 3]$

$$\left[AC = 6 + 5x - 2x^2 + \frac{3}{x}\right]$$

प्र0 8 यदि कुल लागत फलन $100 + 3x + 4x^2 + 5x^3$ तो सीमान्त लागत फलन एवं समाकलनन द्वारा पुनः लागत फलन ज्ञात कीजिए।

$30.8\ [MC = 3 + 8x + 15x^2]$

6.15 संदर्भ ग्रन्थ

- RGD Allen (1998) – 'Mathematical Analysis for Economists', Macmillan India Limited, Delhi.
- सुदामा सिंह, ओ0पी0 सिंह, वाई0 के0 सिंह (2002) – अर्थशास्त्रीय गणित एवं प्रारम्भिक सांख्यिकी – राधा पब्लिकेशन्स, नई दिल्ली।
- D.R. Agarwal (2001) – Mathematics for Economists – Vrinda Publications (P) Ltd., Delhi.
- एस0एन0 लाल, एल0के0 चतुर्वेदी (2010) –परिमाणात्मक विश्लेषण, शिव पब्लिशिंग हाउस, इलाहाबाद।

इकाई 7 आव्यूह

7.1 प्रस्तावना

पूर्व इकाई में हम समाकलनन के अर्थशास्त्र में प्रमुख अपयोगों की व्याख्या की , प्रस्तुत इकाई के अंतर्गत हम संख्याओं के आयताकार अंकायत अथवा क्रम विन्यास आव्यूह प्रमुख अपयोगों की व्याख्या करेगें। यह संख्याएँ या तो वास्तविक अथवा सम्मिश्र हो सकती है। इसका सामान्य रुप निम्न है . आव्यूह का स्वरुप।

$$\begin{bmatrix} a_{11} \; a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \ldots a_{2n} \\ a_{m1} \, a_{m2} \ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$

7.2 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययनोंपरान्त पाठक –

आव्यूह– आव्यूह क्या है?एक आव्यूह के स्वरुप, क्रम , उपयोग्तिा, सारणिक तथा आव्यूह में अन्तर , आव्यूह के प्रकार, आव्यूह बीजगणित , आव्यूहों की समानता, आव्यूह का योग तथा आव्यूह का घटानाए अदिश गुणन, आव्यूह गुणन, परिवर्त्त आव्यूह की कुछ विशेषताएँ और संछेद, संछेद, आव्यूह की कोटि, आव्यूह का व्युत्क्रम, एक घातीय युगपत समीकरणों के हल में आव्यूह का प्रयोगए युगपत समीकरणों के द्वारा आव्यूह का व्युत्क्रम प्राप्त करनाए आव्यूह प्रथक्करण , पर जानकारी प्राप्त करेगें।

विषय को समझाने के लिए कुछ उदाहरण दिये गये हैं, जो आव्यूह के अर्थशास्त्र में प्रयोग को, समझनें में सहायक होंगें। अन्त में पाठकों से अनुरोध है कि अभ्यास के लिये प्रश्न तथा स्वपरीक्षण के द्वारा अपनी क्षमता का आकलन स्वयं करें।

7.3 आव्यूह का क्रम

यह mxn क्रम का एक आव्यूह है जहाँ m पंक्ति और g स्तम्भ के लिए प्रयुक्त है। किसी आव्यूह की पंक्तियों और स्तम्भों की संख्या को आव्यूह का क्रम (order of Matrix) कहते हैं तथा इसे mby n (mxn) पढ़ते हैं। क्रम विन्यास की भीतर स्थित संख्याओं या उनके प्रतीकों को अवयव कहते हैं। सामान्य रुप में इन्हें सारणिकों की तरह ंपर से लिखते हैं। जहाँ ‘I’ पंक्ति और र स्तम्भ के लिये प्रयुक्त किया जाता है।

सामान्य आधार पर

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$ 2X3 क्रम का आव्यूह है।

इसी प्रकार से

$$\begin{bmatrix} 56 \\ 83 \\ 12 \end{bmatrix}$$ 2X3 क्रम का आव्यूह है।

आव्यूह को हम ब्रेकेट या [ ] या *AA* से प्रदर्शित करते हैं। सामान्यतया इसे '[ ]' से प्रदर्शित किया जाता है। अग्रेंजी के बड़े अक्षर A, B, C इत्यादि आव्यूह के लिए प्रयुक्त किए जाते हैं।

7.4 आव्यूह की उपयोगिता

आव्यूह गणितीय विश्लेषण में बहुत उपयोगी है क्योंकि हमें अनेकों बार एक अकेली संख्या नहीं बल्कि संख्याओं के समूह की आवश्यकता पड़ती है और इस समूह को आव्यूह के क्रम में व्यक्त किया जा सकता है। बीजगणित और रैखिक समीकरण में आव्यूह का व्यवस्थित प्रयोग निम्न उदाहरण से स्पष्ट हो सकता है। यदि तीन समीकरण निम्न रुप से दिये गये हैं–

$$a_1n_1 + a_2n_2 + a_3n_3 = d_1$$
$$b_1x_1 + b_2n_2 + b_3n_3 = d_2$$
$$c_1n_1 + c_2n_2 + c_3n_3 = d_3$$

तो गुणांकों, चरों और स्थिर राशियों या प्राचलों को तीन क्रम विन्यास में निम्न प्रकार लिख सकते हैं–

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & C_3 \end{bmatrix} \times = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ और } D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

और उपर्युक्त समीकरणों का रुप अब इस प्रकार होगा।

A X = D

7.5 आव्यूह का उपयोग

आव्यूह के द्वारा हमें–

(1)समीकरण लिखने की विधि

(2)समीकरण से सम्बद्ध होकर हल के अस्तित्व की जाँच तथा पता लगने की विधि प्रदान करती है।

7.6 सारणिक तथा आव्यूह में अन्तर

सारणिक और आव्यूह की धारणा एक दूसरे से जुड़ी है लेकिन इन दोनों में अन्तर इस प्रकार है।

सारणी – 1

आव्यूह	सारणिक
• विभिन्न संख्याओं के पूरे समूह को व्यक्त करता है।	• एक संख्यात्मक मान होता है।
• आव्यूह में पंक्ति और स्तम्भों की भिन्न संख्याएँ भी हो सकती हैं।	• सारणिक सदैव m=n की स्थिति होती है।
• किसी अचर राशि से आव्यूह में गुणा करने पर उसके सारे अवयवों में गुणा हो जाता है।	• किसी अचर राशि से सारणिक में गुणा करने पर उसके किसी एक पंक्ति अथवा स्तम्भ के अवयवों में गुणा होता है।

7.7 आव्यूह के प्रकार[1]

(1) शून्य आव्यूह (Null Matrix)

एक ऐसी आव्यूह जिसका प्रत्येक अवयव शून्य हो, शून्य आव्यूह कहलाती है। इसे [0, लिखा जाता है–

$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 2X3 क्रम की शून्य आव्यूह है।

[1] (1) शून्य आव्यूह (2) वर्ग की आव्यूह (3) इकाई आव्यूह (4) विकर्ण आव्यूह (5) आदिश आव्यूह (6) त्रिभुजीय आव्यूह (7) सममित और विषम सममित आव्यूह (8) परिवर्त्त आव्यूह (9) सदिश आव्यूह (10) अव्युक्रमणीय आव्यूह

$$0=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$ 3X3 क्रम की शून्य आव्यूह है।

(2) **वर्ग की आव्यूह** (Square Matrix)

जिस आव्यूह में पंक्तियों और स्तम्भों की संख्या बराबर हो उसे वर्ग आव्यूह कहते हैं।

यदि m=n तो आव्यूह को nXn क्रम की या n क्रम का वर्ग आव्यूह कहते हैं।

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&a_{2n}\\a_{n1}&a_{n2}&a_{nn}\end{bmatrix} n\times n$$ क्रम की वर्ग आव्यूह है।

इस आव्यूह में a_{11}, a_{22},…a_{nn} को मुख्य विकर्ण (Principal diagonal) के अवयव कहते हैं।

$$A=\begin{bmatrix}2&3\\4&5\end{bmatrix}=2\times 2$$ की वर्ग आव्यूह है।

$$A=\begin{bmatrix}1&1&5\\2&3&7\\-1&5&9\end{bmatrix}=3\times 3$$ क्रम की वर्ग आव्यूह है।

(3) **इकाई आव्यूह** (Identity Matrix)

यदि किसी वर्ग आव्यूह में मुख्य विकर्ण पर I हो और अन्य अवयव शून्य हो तो इस तरह के आव्यूह को इकाई आव्यूह कहते हैं। इसे 'I' के द्वारा चिह्नित किया जाता है।

क्रम को बताने के लिए I_2, I_3 या I_n लिख देते हैं जिसका अर्थ क्रमश 2X2, 3X3 और दग्द क्रम की इकाई आव्यूह से होता है।

$$I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \quad I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$I_n=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&I_n\end{bmatrix}$$

(4) विकर्ण आव्यूह (Diagonal Matrix)

ऐसे आव्यूह जो वर्ग आव्यूह हो और जिसके मुख्य विकर्ण के अवयवों को छोड़कर शेष सभी अवयव शून्य हो विकर्ण आव्यूह कहलाती है।

इसके अन्तर्गत मुख्य विकर्ण पर समान अवयव होना आवश्यक नहीं है।

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ एक 3X3 की विकर्ण आव्यूह है जिसका मुख्य विकर्ण पर 3,4,1 और अन्य जगह पर शून्य है।

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} 2x2$$ की विकर्ण आव्यूह है।

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ भी 3X3 की एक विकर्ण आव्यूह है।

विशेष नाम (आदिश आव्यूह) दिया जाता है।

(5) आदिश आव्यूह (Scalar Matrix)

एक ऐसी वर्ग आव्यूह जिसके मुख्य विकर्ण पर समान अवयव हो और अन्य जगह शून्य हो तो इसे आदिश आव्यूह कहते हैं। इस प्रकार अदिश आव्यूह, विकर्ण आव्यूह की एक विशेष दशा है।

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ एक 3X3 का अदिश आव्यूह है।

(6) त्रिभुजीय आव्यूह (Triangular Matrix)

त्रिभुजीय आव्यूह एक ऐसी वर्ग आव्यूह है जिसके मुख्य विकर्ण के ऊपर या नीचे के सभी अवयव शून्य हो जैसे–

$$|A| = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

I. मुख्य विकर्ण के नीचे के अवयव शून्य है। इसे 'अपर त्रिभुजीय आव्यूह' (Upper Triangular Matrix) कहते हैं

ठ.मुख्य विकर्ण के ऊपर के अवयव शून्य है। इसे लोअर त्रिभुजीय आव्यूह (Lower Triangular Matrix) कहते हैं।

(7) सममित और विषम सममित आव्यूह (Symmetric and Skew Symmetric Matrix)

ऐसी वर्ग आव्यूह को सममित आव्यूह कहते हैं जिसमें aij = aji (सभी i और j के लिए) ऐसी वर्ग आव्यूह जिसके पंक्तियों और स्तम्भों को आपस में इस प्रकार बदला जाए कि–

प्रथम पंक्ति – प्रथम स्तम्भ

द्वितीय पंक्ति – द्वितीय स्तम्भ

इस प्रकार नयी आव्यूह और पुरानी आव्यूह बराबार ही रहे तो ऐसी आव्यूह को सममित आव्यूह कहते हैं।

ऐसे आव्यूह में मुख्य विकर्ण के दोनों तरप के अवयव एक दूसरे के समान होते हैं।–

उदाहरणार्थ–

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$ 3x3 की एक विषम सममित आव्यूह है।

सममित आव्यूह की दशा में आव्यूह का परिवर्त्त (Transposed) मूल आव्यूह के बराबर होता है। अर्थात् $A^T = A$

(8) परिवर्त्त आव्यूह (Transposed Matrix)

यदि किसी आव्यूह की पंक्तियों और स्तम्भों को आपस में बदल दिया जाय तो वही आव्यूह मूल आव्यूह की परिवर्त्त आव्यूह कहलाती है। परिवर्त्त आव्यूह को आव्यूह के ऊपर (T) या (-) लगाकर दिखाया जाता है। जैसे–

यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} a_1 \, b_1 \, c_1 \\ a_2 \, b_2 \, c_2 \end{bmatrix}$

इसका परिवर्त्त आव्यूह A^T या A^1

$$= \begin{bmatrix} a_1 \, a_2 \\ b_1 \, b_2 \\ c_1 \, c_2 \end{bmatrix}$$

यह स्पष्ट है कि यदि मूल आव्यूह का क्रम उग्द होग तो परिवर्त्त आव्यूह का क्रम उग्द हो जायेग।

$A = \begin{bmatrix} 234 \\ 156 \end{bmatrix}$ 2X3 क्रम की आव्यूह है, इसका परिवर्त्त आव्यूह

$A^T = \begin{bmatrix} 21 \\ 35 \\ 46 \end{bmatrix}$ 3×2 क्रम की आव्यूह है।

(9) सदिश आव्यूह (Vector Matrix)

सदिश आव्यूह ही एक विशेष दशा है जिसमें केवल एक ही पंक्ति हो उसे पंक्ति सदिश (Row vector) अथवा पंक्ति आव्यूह (Row Matrix) कहते हैं। जैसे $[a_1, a_2, \ldots a_n]$ या [1,2,3] ;k [5,9,7] इसके विपरीत m x 1 क्रम की आव्यूह जिसमें केवल एक ही स्तम्भ हो, स्तम्भ सदिश या स्तम्भ आव्यूह कहलाती है। जैसे–

$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_n \end{bmatrix}_{m \times 1}$ या $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$ या $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ \end{bmatrix}_{2 \times 1}$

(10) अव्युक्रमणीय आव्यूह (Singular Matrix)ऐसी वर्ग आव्यूह जिससे सम्बद्ध सारणिक का मान शून्य हो तो अव्युतक्रमणीय आव्यूह कहलाती है। हमने पूर्व में देखा था (Table-1) कि सारणिक एक वर्ग आव्यूह का मूल्य है।

यदि आव्यूह A निम्न हो–

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ तो इसका सारणिक

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

अतः आव्यूह अव्युतक्रमणीय आव्यूह है। यदि किसी आव्यूह के संगत सारणिक का मान शून्य न हो तो इसे व्युत्कमणीय (Non Singular Matrix) कहते हैं।

7.8 आव्यूह बीजगणित

आव्यूह बीजगणित के अन्तर्गत निम्न प्रमुख बिन्दु आते हैं–

(1) आव्यूहों की समानता

(2) आव्यूहों का योग और अन्तर

(3) आव्यूहों का गुणा

7.8.1 आव्यूहों की समानता

दो आव्यूह एक समान कहे जायेंगें यदि वे सर्वसम (Identical) हों अर्थात्

(1) दोनों आव्यूहों में पंक्तियों और स्तम्भों की संख्या समान हो अर्थात दोनों का क्रम समान हो।

(2) दोनों आव्यूहों की पंक्तियों और स्तम्भों के अवयव एक ही हों अर्थात सभी i और j के मानों पर aij=bij । इसी बात को हम इस प्रकार कह सकते हैं कि दोनों के अवयवों में स्थितिजन्य समानता हो।

यदि आव्यूह $[A] = \begin{bmatrix} a+b & 2c+d \\ a-b & c-d \end{bmatrix}$

$[B] = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

तो [A] और [B] बराबार होंगे यदि–,

b=3 तथा 2c+d=5

-b=1 तथा c-d=4

अतः =2, b=1, c=3, d=-1

7.8.2 आव्यूह का योग तथा आव्यूह का घटाना

एक ही क्रम (order) की दो आव्यूह A और B का योग एक ऐसी आव्यूह होती है जिसके अवयव आव्यूह A और B के संगत अवयवों को योग होते हैं। उदाहरणार्थ–

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

तो $A + B = \begin{bmatrix} a_1 + c_1 & b_1 + d_1 \\ a_2 + c_2 & b_2 + d_2 \end{bmatrix}$

यदि $A = \begin{bmatrix} 325 \\ 114 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 412 \\ 530 \end{bmatrix}$

तो $A + B = \begin{bmatrix} 3+4 & 2+1 & 5+2 \\ 1+5 & 1+3 & 4+0 \end{bmatrix}$

इस प्रकार यदि A = [aij] और B=[bij] एक ही क्रम की हों तो –

A+B = [cij] जहॉ˙ cij=aij=bij

यदि दोनों आव्यूह समान क्रम की नहीं हैं तो दोनों का योग परिभाषित नहीं होगा।

आव्यूहों का घटाना

जिस प्रकार से हम दो आव्यूहों को जोड़ते हैं उसी प्रकार से समान क्रम की दो आव्यूहों को घटाया भी जाता है।

$A = \begin{bmatrix} a_1 \, b_1 \\ a_2 \, b_2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} c_1 \, d_1 \\ c_2 \, d_2 \end{bmatrix}$

उदाहरणार्थ–

तो $A - b = \begin{bmatrix} a_1 - c_1 & b_1 - d_1 \\ a_2 - c_2 & b_2 - d_2 \end{bmatrix}$ वास्तव में A-B=A+(-B)

यदि $A = \begin{bmatrix} 456 \\ 549 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

तो $A - B = \begin{bmatrix} 4-1 & 5-3 & 6-5 \\ 7-7 & 4-1 & 9-11 \end{bmatrix}$

$$A-B=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 3 & -2\end{bmatrix}$$

उदाहरण—

यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 6\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 7 & 5\end{bmatrix}$

तो A+B तथा A-B ज्ञात कीजिए।

हल—

यहां A तथा B दोनों समान क्रम (2X2) के हैं अतः योग तथा घटाना सम्भव है, जो निम्न है—

(1) $A+B=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 3 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1\\ 7 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+2 & 4+1\\ 3+7 & 6+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 10 & 11\end{bmatrix}$

(2) $A-B=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 3 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1\\ 7 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-2 & 4-1\\ 3-7 & 6-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ -4 & 1\end{bmatrix}$

उदाहरण—

यदि $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 5\\ 7 & 1 & 8\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}6 & -1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$

तो A+B तथा A-B का मान ज्ञात कीजिए।

हल—

यहां पर A का क्रम 2X3 और B 2X2 है। अर्थात् दोनों समान क्रम के नहीं है। इसलिए योग करना और घटाना दोनों सम्भव नहीं है।

उदाहरण—

यदि $A=\begin{bmatrix}5 & 6 & 7\\ 2 & 5 & 1\end{bmatrix}$

$$B=\begin{bmatrix}3 & 1 & 5\\ 2 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}1 & 9 & 8\\ 5 & 4 & 3\end{bmatrix}$$

तो योग का साहचर्य नियम सिद्ध कीजिए–

हल– यदि A,B और C एक ही क्रम (order) की तीन आव्यूह हों तो–

1. (A+B)C = A + (B+C) अर्थात् आव्यूह योग में साहचर्य नियम लागू होता है।

उपरोक्त उदाहरण में A, B तथा C एक समान क्रम (3X2) की आव्यूह हैं, अतः

योग का साहचर्य (Association) नियम

(A+B) + C = A (B+C)

प्रथमतया–

$$A+B=\begin{bmatrix}5&6&7\\2&5&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&1&5\\2&2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&7&12\\4&7&15\end{bmatrix} \text{--------------------} \quad (1)$$

L.H.S. बायें पक्ष का योग–

$$(A+B)+C=\begin{bmatrix}8&7&12\\4&7&5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&9&8\\5&4&3\end{bmatrix} \text{--------------------------------------}(2)$$

$$(A+B)+C=\begin{bmatrix}9&16&20\\9&11&8\end{bmatrix} \text{--}(3)$$

R.H.S. दांयें पक्ष का योग

$$A+(B+C)=\begin{bmatrix}5&6&7\\2&5&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&1&5\\2&2&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&9&8\\5&4&3\end{bmatrix} \text{----------------------------}(4)$$

$$A+(B+C)=\begin{bmatrix}5&6&7\\2&5&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&10&13\\7&6&7\end{bmatrix} \text{--------------------------------------}(5)$$

$$A+(B+C)=\begin{bmatrix}9&16&20\\9&11&8\end{bmatrix} \text{---}(6)$$

स्पष्ट है L.H.S. = R.H.S. समी. (3) व (6)

अतः सिद्ध (A+B)+C=A+(B+C)

उदाहरण–

यदि $x=\begin{bmatrix}5&7&3\\1&4&5\end{bmatrix}$ तथा $y=\begin{bmatrix}4&3&2\\1&5&9\end{bmatrix}$ हो तो () का मान ज्ञात कीजिए।

जहां n+y-X=0, 0 शून्य आव्यूह है।

हल–

मान लेते हैं–

$$z=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

L.H.S. बांया पक्ष –

$$x+y=\begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

तथा $x+y-z=\begin{bmatrix} 9 & 10 & 5 \\ 2 & 19 & 14 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} 9-a_1 & 10-b_1 & 5-c_1 \\ 2-a_2 & 19-b_2 & 14-c_2 \end{bmatrix}$$

चूँकि L.H.S. = R.H.S.

अतः $=\begin{bmatrix} 9-a_1 & 10-b_1 & 5-c_1 \\ 2-a_2 & 19-b_2 & 14-c_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

हम जानते हैं कि दो आव्यूहों की समानता के लिए अवयवों का समान होना भी आवश्यक है अतः–

q9-a_1=0 अर्थात a_1=9

10-b_1=0 अर्थात b_1=10

5-c_1=0 अर्थात c_1=5

2-q_2=0 अर्थात a_2=9

9-b_2=0 अर्थात b_2=9

14-c_2=0 अर्थात c_2=14

अतः

$$z=\begin{bmatrix} 9 & 10 & 5 \\ 2 & 19 & 14 \end{bmatrix}$$

7.9 अदिश गुणन

किसी अदिश K और आव्यूह A का गुणनफल KA या AK एक ऐसी आव्यूह है जिसका प्रत्येक अवयव आव्यूह A के अवयव का K गुना होगा।

$$K\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ka_1 & Kb_1 & Kc_1 \\ Ka_2 & Kb_2 & Kc_2 \end{bmatrix}$$

स्पष्ट है कि किसी आव्यूह में अचर राशि से गुणा करने पर उसके प्रत्येक अवयव में उस अचर राशि का गुणा लग जाता है।

यदि A तथा B समान क्रम की हों तथा K_1 और K_2 दो अचर राशियां हों तो–

1- $K_1K_2(A) = K_1(K_2A)$

2- $K_1(A+B)=K_1a+K_1B$

3- $(K_1+K_2)A=K_1A+K_2A$

4- $I.A = A.I = A$

उदाहरण– यदि $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

तो 2A तथा 4A का मान ज्ञात कीजिए–

यहां 2A में 2 अचर राशि है अतः–

$$2A = \begin{bmatrix} 2\times4 & 2\times6 & 2\times7 \\ 2\times1 & 2\times2 & 2\times3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 14 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

इसी प्रकार 4। में 4 अचर राशि है अतः

$$4A = \begin{bmatrix} 4\times4 & 4\times6 & 4\times7 \\ 4\times1 & 4\times2 & 4\times3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 24 & 28 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

(2) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ हो तो

(I) 2A+ 3B तथा (II) 5A – 2B ज्ञात कीजिए

(1) 1A+3B में 2,3 अचर राशियां हैं–

हल–2 $$2A=\begin{bmatrix}2\times1 & 2\times2 & 2\times3\\ 2\times4 & 2\times5 & 2\times6\\ 2\times7 & 2\times8 & 2\times9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 8 & 10 & 12\\ 14 & 16 & 18\end{bmatrix}$$

$$3B=\begin{bmatrix}3\times5 & 3\times6 & 3\times7\\ 3\times1 & 3\times2 & 3\times3\\ 3\times4 & 3\times5 & 3\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15 & 18 & 21\\ 3 & 6 & 9\\ 12 & 15 & 3\end{bmatrix}$$

$$2A+3B=\begin{bmatrix}17 & 22 & 27\\ 11 & 16 & 21\\ 26 & 31 & 21\end{bmatrix}$$

(2) इसी प्रकार 5A+2B का मान निकालते हुए–

$$5A=\begin{bmatrix}5\times1 & 5\times2 & 5\times3\\ 5\times4 & 5\times5 & 5\times6\\ 5\times7 & 5\times8 & 5\times9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 10 & 15\\ 20 & 25 & 30\\ 35 & 40 & 45\end{bmatrix}$$

$$2B=\begin{bmatrix}2\times5 & 2\times6 & 2\times7\\ 2\times1 & 2\times2 & 2\times3\\ 2\times4 & 2\times5 & 2\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 12 & 14\\ 2 & 4 & 6\\ 8 & 10 & 2\end{bmatrix}$$

$$5A-2B=\begin{bmatrix}-5 & -2 & 1\\ 18 & 21 & 24\\ 27 & 30 & 43\end{bmatrix}$$

7.10 आव्यूह गुणन

दो आव्यूह A और B का गुणनफल तभी अस्तित्वमान होग जब आव्यूह A में स्तम्भों की संख्या आव्यूह B में पंक्तियों की संख्या के बराबर हो।

यदि A का क्रम 'mXn' हो तथा B का क्रम 'pXr' हो तो AB तभी अनुकूल होगा जब N=P के हो।

यदि– $A=\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{bmatrix}$ $B==\begin{bmatrix}m1 & n1\\ m2 & n2\\ m3 & n3\end{bmatrix}$

तो AB प्राप्त करने के लिये A की पंक्ति (Row) के अवयवों को B के स्तम्भ (Column) के अवयवों से निम्न प्रकार से गुणा किया जा सकता है।

यहां A का क्रम 2X3 तथा B का क्रम 3X2 है जहां A के स्तम्भों की संख्या B की पंक्तियों की संख्या के बराबर है। अब A की पंक्ति के अवयवों और B के स्तम्भ के अवयवों में क्रमागत गुणा करके जोड़ते हैं।

$$AB = \begin{bmatrix} \text{a1.m1} + \text{b1.m2} + \text{c1.m3} & \text{a1n1} + \text{b1.n2} + \text{c1.n3} \\ \text{a2.m1} + \text{b2.m2} + \text{c2.m2} & \text{a2.n1} + \text{b2.n2} + \text{c2.n3} \end{bmatrix}$$

इस प्रकार यह स्पष्ट है कि यदि A का क्रम mXn तथा B का क्रम nXr हो तो AB का क्रम mXr होगा।

संख्यात्मक उदाहरण लेकर हम गुणा को आसानी से समझ सकते हैं।

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} 2\times3 \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} 3\times2$$

स्पष्ट है कि ‘A' में स्तम्भों की संख्या B में पंक्तियों की संख्या के बराबर है अतः AB प्राप्त करना सम्भव है।

$$AB = \begin{bmatrix} 2+9+5 & 4+12+2 \\ 4+15+10 & 8+20+4 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 16 & 18 \\ 29 & 32 \end{bmatrix} 2\times2$$

इस प्रकार AB का क्रम 2X2 है।

उदाहरण– यदि $A = [1234]$ 1×4 B= $\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$ 4×1 B यहां AB सम्भव है

क्योंकि A में स्तम्भों की संख्या (4) B में पंक्तियों की संख्या (4) के बराबर है। यहां AB का क्रम 1X1 का होग अर्थात् केवल एक अवयव प्राप्त होगा

$$AB = [1\times1 + 2\times2 + 3\times3 + 4\times4] \qquad AB = [30] \quad 1X1$$

इस प्रकार आव्यूह गुणन में निम्न बिन्दु ध्यान रखने चाहिए।

(1) सर्वप्रथम हमें यह पता लगना चाहिए कि A और B का गुणा सम्भव है अथवा नहीं– इसके लिए A में स्तम्भों (Column) की संख्या B में पंक्तियों (rows) की संख्या बराबर होनी चाहिए।

(2) यदि AB प्राप्त करना सम्भव हो तो A की पंक्ति (row) के अवयवों

(elements) का B के स्तम्भ (columns) के अवयवों से क्रमागत गुणा करके जोड़ते हैं जो इस प्रकार है–

A की प्रथम पंक्ति (row) को B के प्रथम स्तम्भ (column) से गुणा करके जोड़ देते हैं तो AB का प्रथम अवयव प्राप्त होता है।

इसी प्रकार A की दूसरी पंक्ति को B के सभी स्तम्भों में गुणा करते हैं और ऐसे ही आगे बढ़ते हैं।

सामान्य बीजगणित में 2X3 का वही अर्थ है जो 3X2 का है इस प्रकार ny=yn। परन्तु आव्यूह बीजगणित में स्थिति इससे भिन्न होती है। यदि AB परिभाषित है तो इसका यह अर्थ नहीं निकलता है कि BA भी परिभाषित होगी। यदि हम यह मान भी लें AB और BA दोनों परिभाषित हैं तो भी यह आवश्यक नहीं कि AB=BA होगा।

उदाहरण– यदि

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} 2X3 \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} 3X2$$

जहां AB परिभाषित है $A_{2\times3}$, $B_{3\times2} \rightarrow AB_{2\times2}$

तथा BA परिभाषित है $B_{3\times2}$, $A_{2\times3}$, $\rightarrow BA_{3\times3}$

जहां $AB \neq BA$

$$AB = \begin{bmatrix} 16 & 18 \\ 29 & 32 \end{bmatrix} () \text{ तथा } BA = \begin{bmatrix} 10 & 13 & 5 \\ 22 & 29 & 11 \\ 18 & 25 & 7 \end{bmatrix}$$

जहां $AB \neq BA$

उदाहरण–

यदि ।$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 7\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

तो AB और BA दोनों परिभाषित हैं तथा AB=BA है।

$$AB=BA=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

यदि AB=0 (शून्य आव्यूह) हैं तो इससे यह तात्पर्य नहीं निकाला जा सकता कि या तो A=0 अथवा B=0 है। निम्न उदाहरण से स्पष्ट है–

यदि $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$

तो $AB=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}=0$

यहां AB में A को पूर्व गुणक (Pre-multiplier) तथा B को उत्तर गुणक(Post multiplier) कहते हैं। इसी प्रकार AB आव्यूह को A आव्यूह का B आव्यूह से उत्तर गुणन (Post Multiplying Matrix A by Matrix B) अथवा आव्यूह B का आव्यूह A से पूर्व गुणन (Premultiplying Matrix B by A) कहते हैं।

आव्यूह गुणन के नियम–

(1) साहचर्य नियम लागू होता है यदि AB और C का गुणा सम्भव हो तो (AB)C=A(BC) है।

(2) बंटन का नियम (Distributive law) लागू होता है। यदि AB, AC तथा B+C का अस्तित्व हो– A(B+C)=AB+AC

(3) किसी अचर राशि के साथ K(AB) = (KA) B = A(KB) सत्य सिद्ध होता है।

(4) आव्यूह गुणन के संबंध में क्रम विनियम (Cummulative) नियम लागू नहीं होता क्योंकि साधारणतया AB=BA इन नियमों को हम निम्न उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करेगें।

उदाहरण–

यदि $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}5 & 4\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

तो सिद्ध कीजिए कि A(B+C)=AB+AC

हल

$$B+C=\begin{bmatrix}5 & 4\\ 3 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 5\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

$$A(B+C)=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}6 & 5\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

$$A(B+C)=\begin{bmatrix}2\times6+3\times3 & 2\times5+3\times1\\ 1\times6+4\times3 & 1\times5+4\times1\end{bmatrix}$$

$$A(B+C)=\begin{bmatrix}21 & 13\\ 18 & 9\end{bmatrix}\text{------------------------------------}(1)$$

इसी प्रकार

$$AB=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5 & 4\\ 3 & 2\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}2\times5+3\times3 & 2\times4+3\times2\\ 1\times5+4\times3 & 1\times4+4\times2\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}19 & 14\\ 17 & 12\end{bmatrix}$$

तथा

$$AC=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$AC=\begin{bmatrix}2\times1+3\times0 & 2\times1+3\times(-1)\\ 1\times1+4\times0 & 1\times1+4\times(-1)\end{bmatrix}$$

$$AC=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & -3\end{bmatrix}$$

अब

$$AB + AC = \begin{bmatrix} 19 & 14 \\ 17 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{bmatrix} 21 & 13 \\ 18 & 9 \end{bmatrix} \text{---------------------------------(2)}$$

समी. (1) तथा (2) से

A(B+C)= AB+AC

उदाहरण– यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ तो सिद्ध कीजिए कि–

(a) A.I=I.A=A

(b)=I=I^2=I^3

हल

() यहां A और I दोनों (3×3) की वर्ग आव्यूह है अतः AI और IA दोनों परिभाषित हैं।

$$AI = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times1+3\times0+2\times0 & 1\times0+3\times1+2\times0 & 1\times0+3\times0+2\times1 \\ 4\times1+1\times0+5\times0 & 4\times0+1\times1+5\times0 & 4\times0+1\times0+2\times3 \\ 1\times1+1\times0+2\times0 & 1\times0+1\times1+2\times0 & 1\times0+1\times0+2\times1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = A$$

अतः AI=A --------------(i)

अब $IA=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\4 & 1 & 5\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1\times1+0\times4+0\times1 & 1\times3+0\times1+0\times1 & 1\times2+0\times5+0\times2\\0\times1+1\times4+0\times1 & 0\times3+1\times1+0\times1 & 0\times2+1\times5+0\times2\\0\times1+0\times4+1\times1 & 0\times3+0\times1+1\times1 & 0\times2+0\times5+1\times2\end{bmatrix}$$

$IA=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\4 & 1 & 5\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}=A$----------------------------(i)

समीकरण (i) तथा (ii) से

A.I=I.A=A

(इ) किसी वर्ग आव्यूह में $A^2=A.A$ इसी आधार पर $I^2=I.I$

$$I.I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\times1+0\times0+0\times0 & 1\times0+0\times1+0\times0 & 1\times0+0\times0+0\times1\\0\times1+1\times0+0\times0 & 0\times0+1\times1+0\times0 & 0\times0+1\times0+0\times1\\0\times1+0\times0+1\times0 & 0\times0+0\times1+1\times0 & 0\times0+0\times0+1\times1\end{bmatrix}$$

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

अतः $I^2=I$

अब $I^3=I^2.I\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I$

या $I^3= I$

समी (i) तथा(ii) से

$I^3=I^2=I$

नोट– यदि आव्यूह वर्ग आव्यूह नहीं है तो A^2, A^3, B^2, B^3 का मान ज्ञात नहीं किया जा सकता।

7.11. परिवर्त्त आव्यूह की कुछ विशेषताएँ और संछेद

हमने देखा कि यदि किसी आव्यूह । की पंक्तियों को और स्तम्भों को पंक्तियों में बदल दिया जाए तो नयी आव्यूह । की परिवर्त्त आव्यूह कहलाती है और इसे A से चिह्नित करते हैं। परिवर्त्त आव्यूह की कुछ महत्वपूर्ण विशेशताएँ होती हैं जो निम्न हैं–

(1) $(A+B)^T= A^T+B^T$

(2) $(kA)^T= kA^T$ जहां k एक आदिश राशि है।

(3) $(A^T)^T= A$

(4) $(AB)^T= B^T.A^T$

(5) $(A, A_2,......A_k)^T = {}_{Ak}^{T} \ldots\ldots A_2^T$

7.11.1 संछेद

किसी वर्ग आव्यूह A के मुख्य विकर्ण के अवयवों के योग को आव्यूह का संछेद कहते हैं और $t_r(A)$ से लिखते हैं। संछेद के संबंध में निम्न दो बातें ध्यान देने योग्य हैं–

(1) दो आव्यूहों के योग का संछेद प्रत्येक आव्यू हके संछेद का योग होता है अर्थात् –

$t_r(A+B)= t_r(A)+t_r(B)$

(2) यदि (A) और (B) इस प्रकार की दो आव्यूह है जिनके लिए AB और BA दोनों परिभाषित है तो AB का संछेद वही होग जो BA का संछेद है अर्थात्

$t_r(AB)= t_r(BA)$ if and only if AB and BA exist.

यदि आव्यूह $A=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ $t_r(A) = 3+1+7=11$

7.12 आव्यूह की कोटि

आव्यूह की कोटि आव्यूह में रेखीय–स्वतंत्र पंक्तियों अथवा स्तम्भों की अधिकतम संख्या होती है या किसी आव्यूह (A) की कोटि उस आव्यूह से बनी सारणिक के सबसे बड़े (largest) XSj शून्य (non-zero) अपसारणिक के क्रम के बराबर होती है।

7.12.1 आव्यूह की कोटि ज्ञात करने की विधि–

(1) यदि आव्यूह वर्ग आव्यूह वर्ग आव्यूह है तो उसका सारणिक–मान ज्ञात करते हैं, यदि यह मान शून्य नहीं है तो आव्यूह की कोटि उस सारणिक के क्रम के बराबर होगी आव्यूह की कोटि ज्ञात करने के लिए इसे सारणिक बना कर मान ज्ञात करते हैं।

(2) यदि वर्ग आव्यूह में बनी सारणिक का मान शून्य हो तो हम 1 कम क्रम की अपसारणिक देखते हैं। इन अपसारणिकों में यदि एक भी शून्य न हुई तो इस उपसारणिक का क्रम ही आव्यूह की कोटि होगी। यदि ये सभी उपसारणिक शून्य हुई तो एक क्रम कम करके पुनः अपसारणिक का मान ज्ञात किया जाता है।

7.13 आव्यूह का व्युत्क्रम

आव्यूह बीजगणित, साधारण बीजगणित से भिन्न होता है इसमें निम्न बातों का ध्यान रखना चाहिए–

(1) आव्यूह वर्ग आव्यूह हो।

(2) आव्यूह व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह हो।

यदि किसी वर्ग आव्यूह A के साथ कोई दूसरी आव्यूह का संबंध इस प्रकार हो कि $AB=BA=I$ जहां I इकाई आव्यूह है।

तो आव्यूह A को व्युत्क्रमणीय आव्यूह तथा B को A का व्युत्क्रम या प्रतिलोम कहते हैं और $B=A^{-1}$ लिखते हैं जैसा कि स्पष्ट है

$A.A^{-1}=A^{-1}=I$

यदि A और B, क्रम की इस प्रकार की वर्ग आव्यूह हो कि $AB=I_n=BA$ तो A और B एक दूसरे कि गुणात्मक व्युत्क्रम (multiplicative inverse) है।

7.13.1 व्युत्क्रम आव्यूह के संबंध में निम्न परिणाम सत्य सिद्ध होते हैं–

(1) $A.A^{-1}=A^{-1}A=I$

(2) $(A^{-1})^{-1}=A$

(3) $(AB)^{-1}= B^{-1}A^{-1}$

(4) $A^{-n} = (A^{-1})^{n}$

(5) $(adjA)^{-1}=adj(A^{-1})$

7.13.2 आव्यूह ज्ञात करने की विधियां

मुख्य रुप से आव्यूह का व्युत्क्रम दो प्रकार से ज्ञात किया जाता है–

(1) आव्यूह की सारणिक तथा सहखण्डन द्वारा

(2) मूल क्रियाओं द्वारा

इन दोनों विधियों में पहली विधि ही सरल एवं प्रचलित है।

7.14 एक घातीय युगपत समीकरणों के हल में आव्यूह का प्रयोग

यदि निम्न समीकरण को आव्यूह के प्रयोग से हल किया जाए तो –

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

इसे आव्यूह रूप में निम्न प्रकार से लिख सकते हैं।

$$\underset{(A)}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} \underset{(X)}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} = \underset{(B)}{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}$$

इसे सामान्य रूप में $AX = B$ लिख सकते हैं

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ गुणांकों की आव्यूह है।

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ चरों का सादिश है।

$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ स्तम्भ सदिश (vector) है।

यदि $A \neq 0$ तो इसका व्युत्क्रम इस प्रकार प्राप्त किया जा सकता है।

क्योंकि $A^{-1} A = I.$

समीकरण $A\,X = B$ से

दोनों तरफ A^{-1} से गुणा करने पर

$$(A^{-1}\ A)\ X = A^{-1}\ B$$

$$IX = A^{-1} B$$

$$X = A^{-1}\ B$$

प्रदत्त समीकरण का हल है

उदाहरण – सकीकरणों

$$x+y+z=6$$

$$x-y+z=2$$

$$2x+y-z=1$$

को हल कीजिए ।

हल –

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + z = 2$$

$$2x + y - z = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad |A| = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_3 \to C_3 - C_1 \end{matrix}$$

प्रथम पंक्ति के अनुरूप विस्तार करने पर

$$= 6-0=6$$

सहखण्डों के संबंध में

$$C_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 0, \quad C_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = 3, \qquad C_{13} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 3,$$

$$C_{21} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 2, \quad C_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = -3, \quad C_{23} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 1,$$

$$C_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 2, \quad C_{32} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0, \quad C_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -2$$

सहखण्डों से बनी आव्यूह

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{adj } A = C^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj} A}{|A|} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

आव्यूह के प्रयोग द्वारा समीकरणों में अज्ञात राषियों का हल इस प्रकार होता है –

$$X = A^{-1}B \quad \text{जहाँ} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3.$$

7.14.1 युगपत समीकरणों के द्वारा आव्यूह का व्युत्क्रम प्राप्त करना

आव्यूह के व्युत्क्रम प्राप्त करने की विधियाँ पूर्व में बताई जा चुकी हैं। यहाँ हम युगपत समीकरणों द्वारा किसी आव्यूह के व्युत्क्रम प्राप्त करने पर चर्चा करेगें।

उदाहरण – $2x_1 + 3x_2 = 13$

$$-2x_1 + 4x_2 = 8$$

यदि हम X_1 X_2 से बने गुणांकों की आव्यूह का व्युत्क्रम प्राप्त करना है तो हम पहले x_1 और x_2 का मान ज्ञात करेगें जो निम्न प्रकार है –

सारणिकों का प्रयोग हुए अज्ञात राशियों के मान ज्ञात करने (क्रैमर का नियम) की विधि से सुपरिचित हैं।

$$\frac{x_1}{\begin{vmatrix}13 & 3\\ 8 & 4\end{vmatrix}} = \frac{x_2}{\begin{vmatrix}2 & 13\\ -2 & 8\end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix}2 & 3\\ -2 & 4\end{vmatrix}}$$

$$\frac{x_1}{28} = \frac{1}{14} \quad \text{या} \quad x_1 = 3$$

इसी प्रकार $\frac{x_2}{42} = \frac{1}{14}$ या $x_2 = 3$

हम यह भी जानते हैं कि $AX = B$ या $x = A^{-1}B$

$$\begin{vmatrix}2\\ 3\end{vmatrix} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix}4 & -3\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}13\\ 8\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{4}{14} & -\frac{3}{14}\\ \frac{2}{14} & \frac{2}{14}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}13\\ 8\end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{4}{14} & -\frac{3}{14}\\ \frac{2}{14} & \frac{2}{14}\end{bmatrix}$$

7.15 आव्यूह प्रथक्करण

आव्यूह का विभाजन स्तम्भों तथा पंक्तियों के समानान्तर रेखा खींचकर किया जाता है

उदाहरण –

$$A = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{bmatrix}$$ को विभाजित करते हुए

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right]$$ इसमें

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times2} \qquad A_{21} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{1\times2}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}_{2\times2} \qquad A_{22} = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}_{1\times2}$$

अब आव्यूह । को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं –

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

इसे निम्न प्रकार से भी पृथक्करण किया जा सकता है।

$$\left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right]$$

7.16 सारांश

- आव्यूह– संख्याओं के आयताकार अंकायत अथवा (Matrix) क्रम विन्यास को आव्यूह कहते हैं।
- आव्यूह का क्रम (order of Matrix)– आव्यूह की पंक्ति (m) तथा स्तम्भ (n) की संख्याओं को आव्यूह का क्रम कहते हैं, इसे (m X n) पढ़ते हैं। आव्यूह को हम ख, द्वारा लिखते हैं जैसे $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{bmatrix} n \times n$ क्रम की वर्ग आव्यूह है। आव्यूह का प्रयोग हम समीकरण लिखने की विधि तथा समीकरण

से संबंध होकर हल के अस्तित्व की जांच का पता लगने की विधि के लिए करते हैं।

- आव्यूह संख्याओं के पूरे समूह को व्यक्त करता है, इसमें पंक्तियों तथा स्तम्भों की संख्या भिन्न हो सकती है, किसी अचर राशि से आव्यूह में गुणा करने पर उसके सारे अवयवों में गुणा हो जाता हे।
- आव्यूह के प्रकार – देखें सेक्सन 7.7
- दो आव्यूह सर्वसम कहे जायेंगे यदि (1) उनके स्तम्भों तथा पंक्तियों की संख्या समान हो (2) दोनों आव्यूहों की पंक्तियों और स्तम्भों के अवयव एक ही हों, अर्थात् सभी (i) और (j) के मानों पर ($a_{ij}=b_{ij}$)
- दो आव्यूहों का योग सभी परिभाषित होगा, जब वे समान क्रम की हो। यही नियम आव्यूहों के घटाने पर लागू होता है।
- आदिश गुणन में (k) अदिश का (A) आव्यूह के प्रत्येक अवयव का (k) गुना होगा।
- आव्यूह गुणन में (AB) का गुणन तभी अस्तित्वमान होगा जब आव्यूह (A) में स्तम्भों (n) की संख्या आव्यूह (B) में पंक्तियों (m) की संख्या के बराबर हो।
- परिवर्त आव्यूह की विशेषताएँ तथा संछेद 7.11.1, 7.11.2
- आव्यूह की कोटि में आव्यूह में रेखीय–स्वतंत्र पंक्तियों अथवा स्तम्भों की अधिकतम संख्या होती है।
- आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात करने के लिए आव्यूह का वर्ग आव्यूह होना आवश्यक है, तथा आव्यूह व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह होना आवश्यक हो।
- व्युत्क्रम आव्यूह के परिणाम– देखें 7.13.1
- व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात करने की विधियॉ हैं– सारणिक तथा सहखण्डज, Xkl विधि ।
- लाम्बिक आव्यूह– एक वर्ग आव्यूह A लाम्बिक आव्यूह कही जाती है। यदि (।.A^T=I) जहां (I) इकाई आव्यूह और (A^T) परिवर्त्त आव्यूह है।

➢ समवर्ग आव्यूह यदि कोई वर्ग आव्यूह (A) ऐसी है कि (A^2=A) तब (A) को समवर्ग आव्यूह कहते हैं।

7.17 शब्दावली

(1) परिभाषित - defined

(2) क्रम - order

(3) चिन्हित - denoted

(4) अवयव - elements

(5) विकर्ण - diagonal

(6) सदिश –vector

(7) व्युत्क्रमणीय - non-singular

(8) अव्युत्क्रमणीय - singular

(9) अस्तित्वमान – सम्भव

(10) पूर्व गुणन – pre-multiplying

(11) उत्तर गुणन – post-multiplying

(12) परिवर्त्त आव्यूह- transposed Matrix

7.18 अभ्यास प्रश्न

Part-1

A वस्तुनिष्ठ प्रश्न :

1. आव्यूह वास्तव में .... का एक समूह है।

   (i) अवयवों (ii) सहखण्डों (iii) संदेशों (iv) अपसारणिकों

2. जिस आव्यूह में पंक्तियों और स्तम्भों की संख्या बराबर हो उसे क्या कहते हैं?

   (i) इकाई आव्यूह(ii) वर्ग आव्यूह (iii) सदिश आव्यूह (iv)सममित आव्यूह

3. किस आव्यूह के मुख्य विकर्ण के ऊपर या नीचे के सभी अवयव शून्य होते हैं?

   (i)विकर्ण आव्यूह (ii)सदिश आव्यूह (iii)त्रिभुजीय आव्यूह (iv)शून्य आव्यूह

4. यदि किसी आव्यूह की पंक्तियों और स्तम्भों को आपस में बदल दिया जाय तो नयी आव्यूह मूल की .... आव्यूह कहलाती है।

(i) परिवर्त्त (ii)सममित (iii) अव्युतक्रमणीय (iv)सदिश

5.आव्यूह गुणन के सम्बन्ध में निम्न में से कौन सा नियम लागू नही होता?

(i) साहचर्य (ii) क्रम विनिमय नियम (iii) बंटन का नियम (iv)सभी

उत्तर : 1. (iii), 2. (ii), 3. (iii), 4. (ii), 5. (ii)

B सही (T) अथवा गलत (F) चिन्हित करें–

1. दो आव्यूहों A तथा B का योग तभी तथा केवल तभी हो सकता है, यदि उनकी कोटि, पंक्तियाँ तथा स्तम्भ तीनों ही एक दूसरे के बराबर हो।
2. यदि किसी वर्ग आव्यूह में मुख्य शून्य हों तथा अन्य अवयव इकाई हो तो इस तरह से आव्यूह को इकाई आव्यूह कहते है।
3. आव्यूह की कोटि, पंक्तियों की अथवा स्तम्भों की संख्या, जो भी कम हो, से अधिक नहीं हो सकती।
4. दो आव्यूहों A और B का गुणनफल तभी अस्तित्वमान होग तब आव्यूह A में पंक्तियों की संख्या B में स्तम्भों की संख्या के बराबर हो।
5. सममित आव्यूह की दशा में आव्यूह का परिवर्त्त मूल आव्यूह के बराबर होता है।
6. एक ऐसी वर्ग आव्यूह जिसके मुख्य विकर्ण पर समान अवयव हो और अन्य जग्ह शून्य हो तो इसे विकर्ण आव्यूह कहते हैं।
7. सदिश आव्यूह की एक दशा हैं जिसमें केवल एक ही पंक्ति अथवा स्तम्भ होते है।

उत्तर : 1. (T), 2. (F), 3. (T), 4. (F), 5. (T), 6. (F), 7. (T)

Part-2

I **अभ्यास के लिए** लघु प्रश्न

(I) निम्न की व्याख्या कीजिए.

(1) आव्यूह और सारणिक में अन्तर

(2) पूर्व गुणन तथा उत्तर गुणन

(3) परिवर्त्त आव्यूह की विशेषताएँ

(4) व्युत्क्रम आव्यूह के मुख्य गुण

(5) आव्यूह प्रथक्करण

B- सिद्ध कीजिए

(1) यदि $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

तो सिद्ध कीजिए कि $(AB)' = B'A'$

(2) यदि $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

तो सिद्ध कीजिए कि $(AB)' = B'A'$

(3) यदि $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

तो सिद्ध कीजिए कि $(AB)' = B'A'$

(4) यदि $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ तो AA' तथा $A'A$ ज्ञात कीजिए

(5) यदि $A=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ तो ंकरण ज्ञात कीजिए

(1) यदि $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ तो A^{-1} ज्ञात कीजिए

(2) यदि $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ तो A^{-1} ज्ञात कीजिए

(3) A की व्युत्क्रमणीय आव्यूह A^{-1} ज्ञात कीजिए

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

(4) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ तो A^{-1} ज्ञात कीजिए

(5) $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ तो सिद्ध कीजिए कि

$A^3 = A^{-1}$

C- सिद्ध कीजिए

(1) यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ दिया गया है तो सिद्ध कीजिए कि

$(AB) = B' A'$

उत्तर– $(AB) = B' A' = \begin{bmatrix} 20 & 17 \\ 14 & 21 \end{bmatrix}$

(2) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = [123]$ दिया है तो सिद्ध कीजिए कि

$(AB) = B' A'$

उत्तर–

(3) आव्यूह A की $AdjA$ ज्ञात कीजिए

$| A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

उत्तर– $adjA = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -9 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(4) आव्यूह A की $(adjA)$ तथा व्युत्क्रम (A^{-1}) ज्ञात कीजिए

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

उत्तर– $adjA = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

व्युत्क्रम $\begin{bmatrix} 6/7 & -5/7 \\ -1/7 & 2/7 \end{bmatrix}$

(5) आव्यूह A का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए–

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

उत्तर $A = \begin{bmatrix} 7/2 & -3 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$

7.19 संदर्भ ग्रन्थ

- RGD Allen (1998) – 'Mathematical Analysis for Economists', Macmillan India Limited, Delhi.
- सुदामा सिंह, ओ0पी0 सिंह, वाई0 के0 सिंह (2002) – अर्थशास्त्रीय गणित एवं प्रारम्भिक सांख्यिकी – राधा पब्लिकेशन्स, नई दिल्ली।
- D.R. Agarwal (2001) – Mathematics for Economists – Vrinda Publications (P) Ltd., Delhi.
- एस0एन0 लाल, एल0के0 चतुर्वेदी (2010) –परिमाणात्मक विश्लेषण, शिव पब्लिशिंग हाउस, इलाहाबाद।

इकाई : 8 सारणिक

8.1 प्रस्तावना

प्रस्तुत इकाई का अध्ययन करने के पष्चात पाठक युगपत समीकरणों के आसान हल के लिए बीजगणित में सारणिक के प्रयोग पर जानकारी प्राप्त करेगें। इनकी सहायता से समीकरणों के अज्ञात चरों के मूल्य निर्धारित किये जाते हैं। इसीलिये सारणिक को निर्धारक भी कहते हैं।

8.2 उद्देश्य

प्रस्तुत इकाई में सारणिक के प्रयोग की विधि एवं सामान्य नियम पर चर्चा की जायेगी.

- युगपत समीकरणों के आसान हल के लिए बीजगणित में सारणिक के प्रयोग
- सारणिक प्रसार
- उपसारणिक (Minors)
- सारणिकों के विस्तार के सामान्य नियम
- सारणिक की विषेषताएँ (गुण)
- सारणिकों का गुणा
- क्रेमर का नियम
- सारणिक का अवकलज

8.3 परिभाषा

यह युग्मपद विभिन्न पदों के योग अथवा अन्तर के रूप में व्यक्त होते हैं तथा ये पद कई संख्याओं के गुणनफल (Product) होते हैं।

इस प्रकार सारणिक दो या दो से अधिक गुणनफलों के अन्तर की सांकेतिक अभिव्यक्ति है। विभिन्न पदों को दो खड़ी रेखाओं (Vertical Lines) के बीच व्यक्त किया जाता है जैसे

$a_1 b_2 - a_2 - b_1$ को निम्न प्रकार लिख सकते हैं।

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \tag{8.1}$$

सारणिक के अवयव एवं मौलिक अंश

यहाँ पर a_1, b_1, a_2, b_2 को सारणिक का मौलिक अंश और इनके गुणनफल a_1b_2, a_2b_1 को अवयव कहते हैं। सारणिक का क्रम – किसी सारणिक के अन्तर्गत जितने स्तम्भ व पंक्तियाँ होती हैं, वह संख्या ही सारणिक का क्रम कहलाती है।

उदाहणार्थ (Eq. 2)

(A) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ इसमें दो पंक्ति (rows) और दो स्तम्भ हैं, अतः यह द्वितीय क्रम (second order) की सारणिक है।

(B) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ इसमें तीन पंक्ति (rows) और तीन स्तम्भ हैं, अतः यह तृतीय क्रम की सारणिक है। तात्पर्य यह है कि, किसी भी सारणिक का क्रम अथवा कोटि उसकी पंक्ति और स्तम्भों की संख्याओं से तय होती है। यदि 2 पंक्ति और 2 स्तम्भ हैं, तो कोटि दो (second) होगा। यदि 3 पंक्ति और तीन स्तम्भ हैं, तो सारणिक तृतीय कोटि की होगी।

सारणिक के स्तम्भों (columns) और पंक्तियों (rows) मौलिक अंशों (constituents) और तत्वों (elements) में सम्बन्ध किसी सारणिक के स्तम्भों (columns) और पंक्तियों (rows) – मौलिक अंशों (constituents) और तत्वों में क्या सम्बन्ध होता है, इसे निम्न प्रकार से समझा जा सकता है।

Table 1

सारणिक का क्रम (order)	स्तम्भ (columns)	पंक्तियाँ (rows)	मौलिक अंश (constituents)	तत्व (elements)
Order	c	r	$(a_1a_2, b_1b_2,...)$	$(a_1b_2 \dots a_2b_1 \dots)$
~ ok¡	~	~	$\sim^2$	~ L
द्वितीय	2	2	2^2	2L
तृतीय	3	3	3^2	3L

इस प्रकार स्पष्ट है कि यदि सारणिक द्वितीय क्रम का है तो उसके मौलिक अंशों की संख्या $2^2 = 4$ होगी, तथा तत्वों की संख्या $2L = 2$ होगी। यदि सारणिक तृतीय क्रम का है तो मौलिक अंषों की संख्या $3^2 = 9$ होगी और तत्वों की संख्या $3L = 6$ होगी।

8.4 सारणिक के अवयवों का स्थान

किसी सारणिक के अवयवों का एक निश्चित स्थान भी होता है, जैसे कोई अवयव पहली पंक्ति और तीसरे स्तम्भ का हो सकता है, तथा कोई अवयव दूसरी पंक्ति तथा पहले स्तम्भ का हो सकता है। संकेत रूप में प्रत्येक अवयव का स्थान निर्धारित करने के लिये, उप संकेतों का प्रयोग किया जाता हैं। इनमें पहला उपसंकेत पंक्ति को तथा दूसरा उपसंकेत स्तम्भ को दिखाता हैं।

उदाहरण – (1)यदि अवयव के उपसंकेत a_{11} हैं – यहाँ aa प्रथम पंक्ति तथा प्रथम स्तम्भ का है।

(2) यदि अवयव के उपसंकेत a_{32} हैं – यहाँ तृतीय पर्वत तथा द्वितीय स्तम्भ में स्थित है।

पंक्ति को प से तथा स्तम्भ को र से व्यक्त करने का सर्वमान्य प्रचलन है। इस संदर्भ esa a_{ij} का अर्थ i^{th} row (पंक्ति) तथा j^{th} column (स्तम्भ) के अवयव से है।

उदाहरण – निम्न सारणि (जो तृतीय कोटि का है) के अन्तर्गत अवयवों के स्थान का बोध स्पष्ट कराने का प्रयास किया ग्या है।

$$\text{पंक्ति (row)} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

स्तम्भ (columns)

किसी क्रम विन्यास में पंक्तियों और स्तम्भों की संख्याएँ कई हो सकती हैं, तथा अनेक हो सकती है। परन्तु सारणिक के अन्तर्गत पंक्ति और स्तम्भों की संख्या बराबर होती है।

इसीलिये यदि हम आव्यूह के संदर्भ में देखें तो सारणि वर्ग आव्यूह (Square Matrix) से सम्बद्ध संख्या है।

यदि सारणिक में कुल पंक्ति की संख्या 'm' तथा कुल स्तम्भ की संख्या 'n' है तो, सारणिक में $m = n$ की स्थिति होती है।

जबकि 'i' और 'j' विशेष पंक्ति और विशेष स्तम्भ को व्यक्त करने के लिए प्रयुक्त होते हैं।

8.5 सारणिक प्रसार (Determinants's Expansion)

किसी सारणिक का मान ज्ञात करने के लिए उस सारणिक को सिी पंक्ति तथा स्तम्भ के अवयवों के रूप में प्रदर्षित करना सारणिक का प्रसार कहलाता है। सारणिक का प्रसार उपसारणिक की सहायता से किया जाता है। किसी भी पंक्ति अथवा स्तम्भ को लेकर सारणिक का प्रसार किया जा सकता है। किसी भी पंक्ति अथवा स्तम्भ को लेकर सारणिक का प्रसार किया जा सकता है, लेकिन पदों में चिन्ह के क्रम को ध्यान में रखना चाएि। यह क्रम निम्न हैः

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \ldots\ldots \\ - & + & - & \ldots\ldots \\ + & - & + & \ldots\ldots \\ . & . & . & \\ . & . & . & \\ . & . & . & \end{vmatrix} \qquad \text{Eq. 4}$$

वास्तव में चिन्हों का यह क्रम सहखण्ड (Co-factor) पर आधारित है। हमें प्रसार को समझने के लिए उप सारणिक और सहखण्ड की धारणा को समझना होगा।

8.6 उपसारणिक (Minors)

सारणिक के प्रसार में किसी अवयव को गुणा करने वाले छोटे सारणिक को उसका उपसारणिक कहतें हैं। वास्तव में किसी सारणिक के किसी अवयव की उपसारणिक एक छोटे क्रम की सारणिक ही है जो उस अवयव से सम्बद्ध पंक्ति और स्तम्भ को छोड़ देने

पर प्राप्त होती है। किसी कोटि की सारणिक में अवयव a_{ij} की उपसारणिक $(\eta - 1)$ कोटि की सारणिक होगी जो i^{th} row और j^{th} row column को छोड़ने पर प्राप्त होगीं।

यदि हमें a_{11} की उपसारणिक ज्ञात करनी हो तो प्रथम पंक्ति और प्रथम स्तम्भ को छोड़ देने पर जो बच जाता है वही उपसारणिक है। उदाहरण के लिये 3 क्रम की निम्न सारणिक पर ध्यान दें।

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad Eq - 5$$

इस प्रकार a_{11} की उपसारणिक है –

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad Eq - 6$$

इस प्रकार a_{22} की उपसारणिक है –

$$|M_{22}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad Eq - 7$$

तथा a_{13} की उपसारणिक है–

$$|M_{31}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad Eq - 8$$

उपसारणिक को संगत अवयव के स्थान को ध्यान में रखते हुए M से व्यक्त करते हैं उपसारणिक (Minors) – M_{11}, M_{22}, M_{13} इत्यादि। जहाँ $M_{11} - \alpha_{11}$ को उपसारणिक है तथा $M_{12} - a_{12}$, $M_{13} - a_{13}$ के उपसारणिक हैं।

8.6.1 सारणिक का प्रसार

इस प्रकार उपसारणिक की सहायता से A का प्रसार आसानी से किया जा सकता है–

$$A = a_{11}\, M_{11} - a_{12}\, M_{12} + a_{13}\, M_{13} \qquad Eq - 9$$

सारणिक के प्रसार में प्रयुक्त चिन्हों के क्रम को ध्यान में रखते हुये (Fig – 4) (Eq-1) को विस्तार से निम्न प्रकार से प्रसार किया जा सकता है।

$$a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

$$Eq-10$$

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ & \end{vmatrix} a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$a_{11}(a_{22}.a_{33} - a_{32}\ a_{23}) - a_{12}\ (a_{21}\ a_{33} - a_{31}\ a_{23})$$

$$+a_{13}(a_{21}.a_{32} - a_{31}\ a_{22})$$

उपसंकेत प्रसार में a_{11} को उसके उपसारणिक M_{11} से गुणा किया गया है, इसी प्रकार को M_{12}, तथा a_{13} को M_{13} से गुणा किया ग्या है, तथा प्रथम पंक्ति के पहले पद का चिन्ह प्रदन्त चिन्ह होगा। इस प्रकार चिन्ह एकान्तर रूप से बदलते हैं।

8.7 सहखण्ड (Co-factor)

सहखण्ड की अवधारणा, उपसारणिक से जुड़ी है। किसी अवयव की उपसारणिक ही अग्र चिन्ह $\left[(-1)^{i+j}\right]$ के साथ लिखी जाए तो वह उस अवयव का सहखण्ड है। इस प्रकार अवयव a_{ij} का सहखण्ड–

$$Co - factor\ of\ a_{ij} -$$

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\ M_{ij}$$

अतः अवयव a_{ij} का सहखण्ड उसके उपसारणिक में $(-1)^{i+j}$ से गुणा करने पर प्राप्त होता है जहाँ i पंक्ति के लिये तथा j स्तम्भ के लिये प्रयुक्त है। यदि $i+j=$ समसंख्या है तो सहखण्ड और उपसारणिक का चिन्ह एक ही होग। और यदि $i+j$ विषम संख्या है तो सहखण्ड का चिन्ह उपसारणिक के चिन्ह के विपरीत होग। साराणिक प्रसार के समय, चिन्हों का क्रम $(+,-,+,...)$ इसी सहखण्ड की धारणा का परिणाम है। यदि हम प्रथम पंक्ति से सारणिक का प्रसार करते हैं तो पहले $+$ चिन्ह इसलिए आता है कि प्रथम अवयव (a_{11}) प्रथम पंक्ति और प्रथम स्तम्भ का है अर्थात्–

$i=1,\ j=1$ इसलिए $i+j=1+1=2$ और

$(-1)^2=+1$ इसलिए सहखण्ड का चिन्ह धनात्मक है।

इसके आगे (-1) चिन्ह इसलिए आता हैं कि संषत अवयव (a_{12}) में

$$i = 1,\ j = 2 \text{ और } (-1)^{1+2} = (-1)^3 = -1,$$

अर्थात सहखण्ड ऋणात्मक है इसी तरह से यह क्रम चलता रहता है।

उदाहरण – 1

सारणिक $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 \end{vmatrix}$ में 5,8 और 11 की उपसारणिक तथा सहखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल – a. 5 का उपसारणिक तथा सहखण्ड

b. 8 का उपसारणिक तथा सहखण्ड

c.11 का उपसारणिक तथा सहखण्ड

a.(i) 5 का उपसारणिक

(Eq. 6 में दिये ग्ये उदाहरण के अनुसार)

$$= \begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 12 & 13 \end{vmatrix} = 9\times13\text{-}12\times10\text{=}117\text{-}120\text{=-}3$$

(ii) 5 का सहखण्ड

$= (-1)^{1+1}$ उपसारणिक का मान

$$1\times(-3) = -3.$$

b. (i) 8 की उपसारणिक

$$= \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 12 & 13 \end{vmatrix} = 6\times13\text{-}12\times7\text{=}78\text{-}84\text{=-}6$$

(ii) 8 का सहखण्ड

$$= (-1)^{2+1}\times(-6) = 6$$

c. 11 की उपसारणिक

$$= \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 10 \end{vmatrix} = 6\times10\text{-}9\times7\text{=}60\text{-}63\text{=-}3$$

(ii) 11का सहखण्ड

$= (-1)^{3+1} \times (-3) = 1 \times (-3) = -3.$

उहारण 2 – उदाहरण 1 में दियें गये सरणिक का प्रसार कीजिए –

I. हल – प्रथम पंक्ति से विस्तार द्वारा–

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 12 & 13 \end{vmatrix} -6 \begin{vmatrix} 8 & 10 \\ 11 & 13 \end{vmatrix} +7 \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 11 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= 5(117 - 120) -6 (104 - 110) +7 (96 - 99)$$

$$= 5(-3) -6 (-6) +7 (-3)$$

$$= -15 + 36 - 27 = 36 - 36 = 0$$

II. हल – प्रथम स्तम्भ से विस्तार द्वारा

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 12 & 13 \end{vmatrix} -8 \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 12 & 13 \end{vmatrix} +11 \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= 5(117 - 120) -8 (78 - 84) +11 (60 - 63)$$

$$= 5(-3) -8 (-6) +11 (-3)$$

$$= -15 + 48 - 33 = 0$$

इस प्रकार प्रथम स्तम्भ अथवा पंक्ति से विस्तार करने पर उत्तर समान है।

उदाहरण 3.

सारणिक $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ का मान निकालो ।

(1) प्रथम स्तम्भ से विस्तार द्वारा मान निकालने पर

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \left[1 \times -(-2)(3)\right] - 2\left[0 \times 4 - (-2)(8)\right] + 7\left[4 \times 3 - 8 \times 1\right]$$

$$= 3\,(6)-2(16)+7(4)$$

$$= 14$$

उदाहरण (4)

सारणिक $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ का मान निकालो ।

हल – प्रथम पंक्ति के अनुरूप विस्तार करने पर

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\,(6-8)-1(9-4)+0(6-2)$$

$$= 2(-2)-1(5)=-4-5=-9.$$

यह प्रसार हमने प्रथम पंक्ति से किया था यदि तृतीय स्तम्भ के अनुरूप विस्तार करें तो

$$= 0\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0\,(6-2)-4(4-1)+3(4-3)$$

$$= 0-4\times3+3\times1=-1+3=-9 \Rightarrow$$ उत्तम समान

टिप्पणी

इस प्रकार प्रसार चाहे जिस पंक्ति और जिस स्तम्भ से करें सारणिक के मान में कोई अन्तर नही आता।

इसे निम्न उदाहरण द्वारा और स्पष्ट किया जा सकता है –

उहारण : 5

सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ का मान निकालो ।

हल – $\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\0 & 2 & -1\\4 & 1 & 5\end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix}2 & -1\\1 & 5\end{vmatrix} 3\begin{vmatrix}0 & -1\\4 & 5\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}0 & 2\\4 & 1\end{vmatrix}$

$$= 1\big((2\times5)-(-1)1\big) - 3\ (0\times5 -(-1)(4))+$$

$$2\big(0\times1 - 2\times4\big) =$$

$$= 1(10+1) - 3(4) + 2(-8) = 11 - 12 - 16 = -17.$$

यह प्रसार हमने प्रथम पंक्ति से किया था। यदि द्वितीय स्तम्भ से प्रसार करें तो –

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\0 & 2 & -1\\4 & 1 & 5\end{vmatrix} = 33\begin{vmatrix}0 & -1\\4 & 5\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}1 & 2\\4 & 5\end{vmatrix} -1\begin{vmatrix}1 & 2\\0 & -1\end{vmatrix}$$

$$= -3(0+4) + 2\ (5-8) -1(-1-0) = -17$$

अतः प्रसार किसी भी स्तम्भ अथवा पंक्ति से करें सारणिक के मान में कोई अन्तर नहीं आता।

8.8 सारणिकों के विस्तार के सामान्य नियम

यदि सारणिक निम्न प्रकार है –

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

और इसके उप सारणिक क्रमशः A_{11}, A_{12} और A_{13} हैं तो सारणिक का विस्तार बराबर

$$a_{11}\left[(-1)^{1+1}A_{11}\right] + a_{12}\left[(-1)^{1+2}A_{12}\right] + a_{13}\left[(-1)^{1+3}A_{13}\right]$$

प्रथम खण्ड का चिन्ह $+$ तथा दूसरे का और तीसरे का धन होग $-$ ऐसा इसलिये क्योंकि प्रथम $(1+1=2)$ सम संख्या है तथा तृतीय $(1+3=4)$ भी सम संख्या है, तथा द्वितीय खण्ड $(1+2=3)$ विषय संख्या है। जब $i+j$ में $i+j$ का जोड़ सम होता है तो चिन्ह '+' और जब $i+j$ का जोड़ विषय होता है तो चिन्ह '$-$' होता है ।

8.9 सारणिक की विशेषताएँ (गुण)

सारणिक की विशेषताएँ इस दृष्टि से काफी महत्पूर्ण हैं, कि इनका उपयोग करके सारणिक का मान आसानी से ज्ञात कर सकते हैं।

8.9.1 विशेषता – 1 यदि किसी सारणिक की पंक्तियों को स्तम्भों में और स्तम्भों को पंक्तियों में बदला जाए तो सारणिक का मान अपरिवर्तित रहता है।

उदाहरण –– 6

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{तथा}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & c_3 \\ a_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

जहाँ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.\, a_{22} - a_{12}.a_{21} \qquad \text{(i)}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.\, a_{22} - a_{21}.a_{21} \qquad \text{(ii)}$$

समीकरण (i) = (ii)

मूल सारणिक $|A|$ को पंक्ति तथा स्तम्भ परिवर्तित करने के बाद $|A'|$

इसी प्रकार तृतीय क्रम के सारणिक को भी सिद्ध किया जा सकता है।

तृतीय क्रम के सारणिक का अंकगणितीय उदाहरण निम्न प्रकार है –

उदाहरण – 7

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = |A^*|$$

जहाँ सारणिक |A| के स्तम्भ के मौलिक अंश सारणिक A* के पंक्ति के मौलिक अंश के बराबर है जैसे |A| के प्रथम स्तम्भ के मौलिक अंश 2, 1, 5. |A*| के प्रथम पंक्ति के मौलिक अंश 2, 1, 5 के बराबर है।

8.9.2 विशेषता – 2.

यदि किसी पंक्ति (अथवा स्तम्भ) के सभी मौलिक अंशों को किसी अचर राशि (K) से गुणा कर दिया जाए तो सारणिक के मान में उस राशि K का गुणा हो जाता है। उदाहरणार्थ – यदि सारणिक A की प्रथम पंक्ति में स्थिर राशि K से गुणा किया जाय तो सारणिक का रूप

$$\begin{vmatrix} Ka_1 & Kb_1 & Kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = K \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{होगा।}$$

$$= Ka_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - Kb_1 \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + Kc_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= K\left[a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -b_1 \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \right]$$

$$= K \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3. & b_3. & c_3 \end{vmatrix} = KA.$$

उदाहरण – B

एक संख्यात्मक उदाहरण द्वारा इसे समझा जा सकता है –

पूर्व के उदाहरण तीन में निम्न सारणिक

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$ का मान (-9) था – (देखें उदाहरण – 3)

यदि इस सारणिक के प्रथम स्तम्भ में 2 से गुणा कर दिया जाए तो –

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4\,(6-8) - 1\,(18-8) + 0$$

$$= (-2) - 1\times 10 = -8-10 = -18.$$

$$2\times(-9) = 18.$$

विशेषता के अनुसार सारणिक का मान भी 2 के गुणनफल से प्राप्त होता है – सारणिक की इस विशेषता के कारण किसी पंक्ति अथवा स्तम्भ में से सर्वनिष्ठ गुणनखण्ड (common factor) बाहर ले सकते हैं।

8.9.3 विशेषता – 3.

यदि किसी सारणिक में समीप की दो पंक्तियों अथवा स्तम्भों को आपस में बदल दिया जाय तो सारणिक का संख्यात्मक मान वही रहता है लेकिन चिन्ह बदल जाता है . उदाहरणार्थ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = -(a_2b_1 - a_1b_2)$$

Changing the consecutive row

$$= -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = -(b_1a_2 - b_2a_1) = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

इसी प्रकार से $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$= -[b_1(a_2c_3 - a_3c_2) - b_2(a_1c_3 - a_3c_1) + b_3(a_1c_2 - a_2c_1)$$

$$= -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

यदि समीप की पंक्ति अथवा स्तम्भ को क्रमशः आपस में बदला जाए तो सारणिक के चिन्ह में परिवर्तन होता है परन्तु इसका मूल्य समान रहता है।

उदाहरण – 9 : $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \text{ or } -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{vmatrix}$$

Note : यदि पंक्ति तथा स्तम्भ को विषय संख्या बार आपस में बदला जाए तो सारणिक का चिन्ह परिवर्तित होता है, जबकि सम संख्या बार परिवर्तित करने से चिन्ह समान रहता है।

8.9.4 विशेषता – 4

यदि किसी सारणिक में कोई दो पंक्तियाँ अथवा स्तम्भ सर्वसम (Identical) हों तो सारणिक का मान शून्य होता है।

उदाहरण : 10 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

परिवर्तित करने पर

तथा – $\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ b_2 & b_2 & b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{vmatrix} = 0$

Proof $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ b_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_2 & c_3 \end{vmatrix}$

यहाँ प्रथम तथा द्वितीय पंक्ति सर्वसम हैं

विशेशता – 3 का प्रयोग करते हुये यह सारणिक इस प्रकार भी लिखा जा सकता है–

$$= -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\Delta$$

or $\Delta + \Delta = 0$

or $2\Delta = 0$

$\Delta = 0$

इसी प्रकार दो स्तम्भ सर्वसम होने पर सारणिक का मान शून्य होता है, इसे निम्न उदाहरण द्वारा समझा जा सकता है–

उदाहरण : 11

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{and} \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$[3\times4 - 3\times4 = 0]$

$\Rightarrow 1(30\text{-}30) - 4\ (12\text{-}15) + 4(12-15)$

$\Rightarrow 12 - 12 = 0$

8.9.5 विशेषता: 5

यदि सारणिक में कोई पंक्ति अथवा स्तम्भ किसी पंक्ति अथवा स्तम्भ का गुणा हो तो सारणिक का मान शून्य होता है। उदाहरणार्थ

उदाहरण – $|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

यहाँ दूसरी पंक्ति प्रथम पंक्ति की ड्ढ का गुना है।

विशेशता – 2^1 के आधार पर K को बाहर लिया जा सकता है – अतः

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

[यदि किसी पंक्ति अथवा स्तम्भ के सभी मौलिक अंशों को किसी अचर राशि (k) से गुणा कर दिया जाए तो सारणिक को मान में उस राशि k का गुणा हो जाता है।,

विशेशता – 4^2 के आधार पर –

$$k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \times 0 = 0$$ क्योंकि प्रथम और द्वितीय पंक्ति सर्वसम हैं।

इसे संख्यात्मक उदाहरण द्वारा निम्न सारणिक से समझाया गया है –

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$ द्वितीय पंक्ति में से 2 बाहर लेने पर

$= 2 \times 0 = 0$ विशेषता – 4 के आधार पर।

8.9.6 विशेषता – 6

यदि किसी पंक्ति अथवा स्तम्भ का प्रत्येक अंश दो राशियों के योग अथवा अन्तर के रूप में हो तो साराणिक को उसी क्रम की दो सारणिकों के योग अथवा अन्तर के बराबर प्रकट किया जा सकता हैं। जैसे

उदाहरण–13 यदि सारणिक

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 + k_1 & b_1 \\ a_2 + k_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

तो

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 + k_1 & b_1 \\ a_2 + k_2 & b_2 \end{vmatrix} = (a_1 + k_1)b_2 - (a_2 + k_2)b.$$

$$= a_1b_2 + k_1b_2 - a_2b_2 - k_2b_1$$

$$= a_1b_2 - a_2b_1 + k_1b_2 - k_2b_1$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

यदि किसी सारणिक में कोई दो पंक्तियाँ अथवा स्तम्भ सर्वसम (Identical) हो तो सारणिक का मान शून्य होता है ।

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 + k_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + k_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + k_3 & b_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ तो}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 + k_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + k_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + k_3 & b_2 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1 + k_1)\, M_{11} - (a_2 + k_2) M_{21} + (a_3 + k_3) M_3$$

(M उपसारणिक को व्यक्त करता है।)

$$= (a_1M_{11} - a_2M_{21} + a_3M_{31}) + (k_1M_{11} - k_2M_{21} + k_3M_{31})$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

8.9.7 विशेषता – 7

यदि कोई पंक्ति (अथवा स्तम्भ) या पंक्ति (स्तम्भ) का कोई गुणित (multiple) किसी दूसरी पंक्ति में जोड़ा या घटाया जाय तो सारणिक का मान अपरिवर्तित रहता है। उदाहरणार्थ

यदि सारणिक $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ है तथा इसके द्वितीय स्तम्भ को किसी अचर (k) से गुणा करके इसे प्रथम स्तम्भ में से घटा दिया जाय तो सारणिक अपरिवर्तित रहती है। अर्थात –

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 - kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 - kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

इसी विशेषता के आधार पर किसी भी पंक्ति अथवा स्तम्भ को किसी दूसरी पंक्ति या पंक्तियों के योग अथवा अन्तर से प्रतिस्थापित कर दिया जाए तो सारणिक के मान में परिवर्तन नहीं होता है।

उदाहरण : 14 जहाँ $c \rightarrow \text{column}$; $R \rightarrow \text{Rows}$ हैं।

$c_1 \rightarrow c_1 + c_2$ या $c_1 + c_3$ या $c_1 + c_2 + c_3$ इत्यादि ।

$R_1 \rightarrow R_1 + R_2$ या $R_1 + R_2$ या $R_1 + 3R_2$ इत्यादि ।

8.9.8 विशेषता – 8

यदि किसी सारणिक के x वाले अवयव x में बहुपद हों और यदि x के स्थान पर a रखने पर सारणिक शून्य हो जाती होतो $(x-a)$ इसका एक गुणनखण्ड होग।

उदाहरणः 15

$$\text{यदि } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

यदि द्वितीय पंक्ति को $b = a$ से प्रतिस्थापित किया जाए, तो दो समान पंक्ति प्राप्त होती हैं। इस प्रकार Δ शून्य हो जाता है अतः $(a-b)$ Δ का गुणनखण्ड है।

हल प्रश्न (उदाहरण)

उदाहरण – 16 $\begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल – इस सारणिक का मान हम सीधे प्रसार (उपसाणिक की सहायता से) करके ज्ञात कर सकते हैं –

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-6+9) - 6(-4-9) - 1(-6-9)$$

$$= 3 + 78 + 15 = 96$$

या फिर इस सारणिक का मान नियमों का प्रयोग करते हुए पंक्ति स्तम्भ क्रियाओं द्वारा ज्ञात कर सकते हैं –

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_1 \to C_1 + C_3 \\ C_2 \to C_2 - C_3 \end{matrix}$$

$$= 0(0+3) - 7(-10-3) - 1(-5-0)$$

$$= -7 \times (-13) + 1 \times 5 = 96.$$

उदाहरणः 17

सिद्ध कीजिए $\begin{vmatrix} a & c & a+c \\ a+b & b & a \\ b & b+c & c \end{vmatrix} = 4abc$

हल

यदि $\Delta = \begin{vmatrix} a & c & a+c \\ a+b & b & a \\ b & b+c & c \end{vmatrix}$

$R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2(a+b) & 2(b+c) & 2(c+a) \\ a+b & b & a \\ b & b+c & c \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a+b & b & a \\ b & b+c & c \end{vmatrix}$$

यदि (Applying) $R_1 \to R_1 - R_2$

$$\Delta = 2 \begin{vmatrix} o & c & c \\ a+b & b & a \\ b & b+c & c \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 2c\begin{vmatrix} o & 1 & c \\ a+b & b & a \\ b & b+c & c \end{vmatrix}$$

यदि (Applying) $C_2 \to C_2 - C_2$

$$\Delta = 2c\begin{vmatrix} o & o & 1 \\ a+b & b-a & a \\ b & b & c \end{vmatrix}$$

$$= 2c\left[b(a+b) - b(b-a)\right]$$

$$= 2c\left[ba + b^2 - b^2 + ab\right]$$

$$= 2c[2ab] = 4abc$$

अतः सिद्ध।

उदाहरणः 18

$$\begin{vmatrix} 10 & 6 & -1 \\ 17 & 3 & 3 \\ -9 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल .

$$\begin{vmatrix} 10 & 6 & -1 \\ 17 & 3 & 3 \\ -9 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 6 & -1 \\ 8 & 0 & 1 \\ -9 & -3 & -2 \end{vmatrix} R_2 \to R_2 + R_3$$

$$= \begin{vmatrix} -8 & 0 & -5 \\ 8 & 0 & 1 \\ -9 & -3 & -2 \end{vmatrix} R_1 \to R_1 + 2R_3$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 8 & 0 & 1 \\ -9 & -3 & -2 \end{vmatrix} R_1 \to R_1 + R_2$$

$$= -4(-24-0) = 96$$

उदाहरणः 19

सिद्ध कीजिए $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} + xy$

हल – इस सारणिक में प्रथम स्तम्भ में से तीसरे स्तम्भ को घटाने पर अर्थात् –

$C_1 \rightarrow C_1 - C_3$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1+x & 1 \\ -y & 1 & 1+y \end{vmatrix}$$

अब प्रथम स्तम्भ के संदर्भ में विस्तार करने पर –

$$= -y \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1+x & 1 \end{vmatrix} = -y(1-1-x) = xy$$ ण

8.10 सारणिकों का गुणा

सारणिक एक वर्ग आव्यूह का मान है। आव्यूह के गुणा पर विस्तर से चर्चा हम अग्ली इकाई में करेगें। यहाँ यह जान लेना आवश्यक है कि, दो सारणिकों का गुणा तभी किया जा सकता है, तब वे समान कोटि के हों जैसे –

$|A| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ और $|B| \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}$ दो सारणिक दिये हैं

तो पहली सारणिक $|A|$ की पंक्ति के अवयवों का दूसरी सारणिक $|B|$ के स्तम्भ के अवयवों से गुणा किया जाता है, तो निम्न प्रकार है –

$$\begin{vmatrix} a_1c_1 + b_1.c_2 & a_1d_1 + b_1d_2 \\ a_2c_1 + b_2.c_2 & a_2d_1 + b_2.d_2 \end{vmatrix} |A| \times |B|$$

8.11 क्रेमर का नियम (Cramer's Rule)

सारणिक की सहायता से युगपत समीकरणों को हल करने की विधि को क्रेमर का नियम कहते हैं। इस नियम को ध्यान में रखते हुए ही हम आव्यूह के द्वारा युगपत समीकरणों का हल प्राप्त करते है। अतः यह महत्वपूर्ण नियम है।

यहाँ हम दो अज्ञात राशियों के समीकरण पर विचार करते हैं।

उदाहरणः 20

$$a_1 x + b_1 y = m_1 \qquad (i)$$

तथा $$a_2 x + b_2 y = m_2 \qquad (ii)$$

समी० (i) में b_2 से (ii) में (b_1) से गुणा करने पर –

$$a_2 b_2 x + b_1 b_2 y = m_1 b_2 \qquad (iii)$$

$$a_2 b_1 x + b_1 b_2 y = m_2 b_1 \qquad (iv)$$

समी० (iii) में से समी० (iv) को घटाने पर –

$$n(a_1 b_2 - a_2 b_1) = m_1 b_2 - m_2 b_1 \qquad (v)$$

इसी प्रकार

$$y(a_1 b_2 - a_2 b_1) = a_1 m_2 - m_1 q_2 \qquad (vi)$$

समी० (v) से

$$n = \frac{m_1 b_2 - m_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \begin{vmatrix} m_1 & b_1 \\ m_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad (vii)$$

इसी प्रकार

$$y = \frac{a_1 m_2 - a_2 m_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \frac{\begin{vmatrix} a_1 & m_1 \\ a_2 & m_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad (viii)$$

समी० (vii) से

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} m_1 & b_1 \\ m_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad (ix)$$

तथा समी० (viii) से

$$\frac{y}{\begin{vmatrix} a_1 & m_1 \\ a_2 & m_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

समी0 (ix) और (x) से

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} m_1 & b_1 \\ m_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} a_1 & m_1 \\ a_2 & m_2 \end{vmatrix}} \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{x}{|A_1|} = \frac{y}{|A_2|} = \frac{1}{|A|}$$

जहाँ

$|A_1| = \begin{vmatrix} m_1 & b_1 \\ m_2 & b_2 \end{vmatrix}$ = सारणिक में X के गुणांकों की जगह अचर पद लिखने से बनी स्तम्भ वाली सारणिक।

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

8.12 सारणिक का अवकलज (Derivative of a determinant)

किसी सारणिक का अवकलज ज्ञात किया जा सकता है यदि उसे अवयव किसी चर के सापेक्ष अवकलनीय (differentiable) हो। यदि हमें –

उदाहरण: 20

$\begin{matrix} x^3 & 2x+3 \\ 3x^2 & x^4 \end{matrix}$ का अवकलज ज्ञात करना हो तो यह निम्न प्रकार किया जायेगा।

$$\frac{d}{dx} = \begin{vmatrix} x^3 & 2x+3 \\ 3x^2 & x^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x^2 & 2 \\ 3x^2 & x^4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^3 & 2x+3 \\ 6x & 4x^3 \end{vmatrix}$$

यहाँ R_1, R_2 सारणिक के अवयवों का अवकलन करने पर –

$$= [3x^6 - 6x^2] + [4x^6 - 12x^2 - 18x]$$

$$= 7x^6 - 18x^2 - 18x$$

स्पष्ट है कि यदि $n \times n$ आव्यूह $A = [a_{ij}]$ के अवयव X के अवकलनीय फलन (Differentiable function) हों तो X के सापेक्ष सारणिक का अवकलज n सारणिकों

का योग होता है, जिसमें सारणिक A के एक पंक्ति (अथवा स्तम्भ) अवयवों को उनके अवकल गुणांकों से प्रतिस्थापित किया ग्या हो।

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} x^2 & x^3 & 2 \\ 2x & 3x+1 & x^3 \\ 0 & 3x-2 & x^2+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 3x^2 & 0 \\ 2x & 3x+1 & x^3 \\ 0 & 3x-2 & x^2+1 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} x^2 & x^3 & 2 \\ 2 & 3 & 3x^2 \\ 0 & 3x-2 & x^2+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^2 & x^3 & 2 \\ 2x & 3x+1 & x^3 \\ 0 & 3 & 2x \end{vmatrix}$$

8.13. अभ्यास के लिए प्रश्न

वस्तुनिष्ठ प्रश्न :

1.किसी सारणिक के कितने स्तम्भ व पंक्तियाँ होती हैं, वह संख्या ही सारणिक का .... कहलाती है।

(i) अंश (ii) अवयव (iii) क्रम (iv) विस्तार

2.सारणिक के प्रसार में किसी अवयव को गुणा करने वाले छोटे सारणिक को उसका .. कहते है।

(i)सहखण्ड़ (ii)उपसारणिक (iii) गुणनखण्ड़ (iv) इनमें से कोई नहीं

3.यदि किसी सारणिक में कोई दो पंक्तियाँ अथवा स्तम्भ सर्वसम हों तो सारणिक का मान क्या होता है?

(i) शून्य (ii) एक (iii) अनन्त (iv) इनमें से कोई भी

4.यदि कोई पंक्ति या पंक्ति का कोई गुणित किसी दूसरी पंक्ति में जोड़ा या घटाया जाय तो सारणिक का मान क्या रहता है?

(i)परिवर्तित (ii) अपरिवर्तित (iii) एक (iv) शून्य

5. अगर पंक्ति या स्तम्भ को किसी मानक (λ) से गुणा करें तब नये सारणिक का मान पुराने सारणिक के मा का कितना गुना होग?

(i)एक गुना (ii) दूसरा गुना (iii) मानक (λ) गुना (iv) इनमें से कोई नहीं

उत्तर : 1. (i), 2. (ii), 3. (iii), 4. (iv), 5. (iii)

II. सही (T) अथवा गलत (F) चिन्हित करें :

1. किसी सारणिक का मान दोनों विकर्णों पर स्थित अवयवों के गुणनफल के योग द्वारा प्राप्त किया जा सकता है।
2. यदि किसी सारणिक की पंक्तियों को स्तम्भों में और स्तम्भों को पंक्तियों में बदल दिया जाय तो सारणिक का मान अपरिवर्तित रहता है।
3. सारणिक एक वर्ग आव्यूह का मान है।
4. यदि सारणिक में कोई पंक्ति अथवा स्तम्भ किसी पंक्ति अथवा स्तम्भ का गुणा हो तो सारणिक का मान इकाई के बराबर होता है।
5. अगर दो पंक्तियों या स्तम्भों का स्थान परिवर्तित किया जाय तो चिन्ह परिवर्तित हो जाता है।

उत्तर : 1. (F), 2. (T), 3. (T), 4. (F), 5. (T)

प्र0 1 निम्न समीकरणों को क्रेमर के नियम द्वारा हल कीजिए।

(i)
$$\begin{aligned} 3x+3y-Z &= 11 \\ 2x-y+2Z &= 9 \\ 4x+3y+2Z &= 25 \end{aligned}$$
[Ans. $x=2, y=3, z=4$]

(ii)
$$\begin{aligned} x+y+z &= 9 \\ 2x+5y+7z &= 52 \\ 2x+y-z &= 0 \end{aligned}$$
[Ans. $x=1, y=3, z=5$]

प्र0 2 सिद्ध कीजिए

लघु प्रश्न

(i)
$$\begin{vmatrix} a+b & b & c \\ b+c & c & a \\ c+a & a & b \end{vmatrix} = 3abc - a^3 - b^3 - c^3 \text{ ।}$$

(ii)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$$

(iii) $$\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$$

(iv) $$\begin{vmatrix} x+a & x+2a & x+3a \\ x+2a & x+3a & x+4a \\ x+4a & x+5a & x+6a \end{vmatrix} = 0$$

प्र0 3 सिद्ध कीजिए – (दीर्घ प्रश्न)

(i) $$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^2$$

प्र0 4 X का मान ज्ञात कीजिए जब –

$$\begin{vmatrix} a & a & x \\ x & x & x \\ b & n & b \end{vmatrix} = 0$$

8.13.1 अभ्यास के लिए प्रश्न (दीर्घ)

प्रश्न 1 – एक व्यक्ति जिसकी आय 1200 रू0 है, वस्तु X और वस्तु y के क्रय के निम्नांकित संयोगों के मध्य उदासीन रहता है क्योंकि दोनों संयोगों से उसे समान संतुष्टि मिलती है।

(i) x की 10 इकाइयाँ y की 20 इकायाँ

(ii) x की 15 इकायाँ y की 10 इकायाँ

वस्तु x और y की कीमत ज्ञात कीजिए ?

[Ans. 60, 30]

प्रश्न . 2 – यह ज्ञात है कि उपभोग (c) और बचत (s) आय (y) के फलन होते हैं और $c+s=y$| यदि किसी अर्थव्यवस्था में $c=100+0.5y$, $s=50+0.35y$ वो c, s और y के संतुलित मूल्य ज्ञात कीजिए।

[उत्तर – $c=600$, $s=400$, $u=1000$]

प्रश्न – 3 सिद्ध कीजिए –

(i) $\begin{vmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \\ 15 & 18 & 21 \end{vmatrix} = O$

(ii) $\begin{vmatrix} 265 & 240 & 219 \\ 240 & 225 & 198 \\ 219 & 198 & 181 \end{vmatrix} = O$

(iii) $\begin{vmatrix} 29 & 26 & 22 \\ 25 & 31 & 27 \\ 63 & 54 & 46 \end{vmatrix} = O$

(iv) $\begin{vmatrix} 38 & 7 & 63 \\ 16 & 3 & 29 \\ 27 & 5 & 46 \end{vmatrix} = O$

(v) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^2 \end{vmatrix} = abc(a-b)(b-c)(c-a)$

(vi) $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc$

(vii) $\begin{vmatrix} b^2c^2 & bc & b+c \\ c^2a^2 & ca & c+b \\ a^2b^2 & ab & a+b \end{vmatrix} = 0$

प्र0 4. सिद्ध कीजिए –

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$$

प्र0 5. हल कीजिए

$$\begin{vmatrix} 6-x & 3 & 3 \\ 3 & 4-x & 5 \\ 3 & 5 & 4-x \end{vmatrix} = 0$$

प्र0 6. सिद्ध कीजिए –

$$\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix} = x(x+a+b+c)$$

प्र0 7. सिद्ध कीजिए –

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = abcd\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

प्र0 8. हल कीजिए –

$$\begin{vmatrix} 1 & \log_x y & \log x^z \\ \log y^x & 1 & \log y^z \\ \log z^x & \log_z y & 1 \end{vmatrix}$$ जहाँ x, y, z धनात्मक $(+ve)$ हैं।

Ans. $(0,$ क्योंकि $c_1 = c_2 = c_3)$.

प्र0 9. x, y का मान मूल्य ज्ञात कीजिए जब –

$$\begin{vmatrix} 6i & -3i & 1 \\ 4 & 3i & -1 \\ 20 & 3 & i \end{vmatrix} = x + iy$$

Ans. $(x = 0 \;\; y = 0)$

8.14 शब्दावली

1.) **तकनीकी गुणांक** – इसे आगत निर्गत अनुपात भी कहते हैं। इसका परिकलन वांक्षित क्षेत्र के आग्त में उस क्षेत्र के कुल उत्पादन का भाग देने पर ज्ञात किया जाता है।

2.) **तकनीकी व्यूह** – ऐसा व्यूह जिसमें विभिन्न क्षेत्रों के उद्योगों के तकनीकी गुणांक को पंक्ति एवं स्तम्भों में दर्शाया जाय।

8.15 सारांश

प्रस्तुत अध्याय में प्रमुख बिन्दु निम्न हैं –

- युगपत समीकरणों में आसन हल के लिये बीजगणित में विषेष विधि का प्रयोग किया जाता है जिसे सारणिक कहते हैं।
- सारणिक दो या दो से अधिक गुणनफलों के अन्तर की सांकेतिक अभिव्यक्ति है।
- सारणिक का क्रम – किसी सारणिक के अन्तर्गत जितने स्तम्भ व पंक्तियाँ होती हैं, वह संख्या ही सारणिक का क्रम कहलाती है।
- सारणिक में संख्याओं जैसे $(a_1, b_1 \ldots\ldots x_x)$ को मौलिक अंश (Constituents) तथा इनके गुणनफल $(a_1 b_2, a_2 b_1 \ldots m_n n_m)$ को अवयव (elements) कहते हैं।
- सारणिक के मौलिक अंशो की संख्या उसके क्रम द्वारा निर्धारित होती है जैसे द्वितीय क्रम के सारणिक मे $2^2 = 4$ मौलिक अंश होंगे तथा तृतीय क्रम के सारणिक में $3^3 = 9$ होंगे।
- सारणिक के क्रम द्वारा ही तत्वों का निर्धारण होग, जैसे द्वितीय क्रम में तत्वों की संख्या $2L = 2$ होगी तथा तृतीय क्रम में तत्वों की संख्या $3L = 6$ होगी।
- सारणिक के अवयव को उपसंकेतो द्वारा प्रदर्शित किया जाता है जैसे a_{11}, a_{21}, a_{ij}, जिसमें i = पंक्ति j = स्तम्भ का मान होता है।
- सारणिक में पंक्तियों और स्तम्भों की संख्या समान होती है।
- सारणिक का प्रसार उपसारणिक द्वारा किया जाता है, किसी भी पंक्ति अथवा स्तम्भ को लेकर सारणिक का प्रसार किया जा सकता है।
- उपसारणिक (Minor) – किसी सारणिक के किसी अवयव की उपसारणिक, एक सारणिक ही है जो अवयव से सम्बन्धित पंक्ति और स्तम्भ को छोड़ देने पर प्राप्त होती है। इसे M_{ij} से प्रयुक्त करते हैं।

- किसी अवयव की उपसारणिक ही अगर चिन्ह $\left[\left(-1^{i+j}\right)\right]$ के साथ लिखी जाए तो वह उस अवयव का सहखण्ड (cofactor) है –
- जैसे a_{ij} का सहखण्ड $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
- जहाँ M_{ij} - a_{ij} का उपसारणिक है।
- सारणिक विस्तार के सामान्य नियम के अन्तर्गत प्रथम खण्ड (+), द्वितीय (–), तृतीय (+) होग क्योंकि जब $i+j$ का जोड़ सम तब चिन्ह (+) तथा जब $i+j$ का जोड़ विषम तब चिन्ह (–v) होता है।
- सारणिक की विषेषताएँ देखे खण्ड 8.9
- दो सारणिकों का गुणा तभी किया जा सकता है, जब वे समान कोटि के हों।
- क्रेमर का नियम – सारणिक की सहायता से युगपत समीकरणों के हल की विधि।
- किसी सारणिक का अवकलन ज्ञात किया जा सकता है जबकि उसके अवयव किसी चर के सापेक्ष अवकलनीय हों।

8.16 संदर्भ ग्रन्थ

- RGD Allen (1998) – 'Mathematical Analysis for Economists', Macmillan India Limited, Delhi.
- सुदामा सिंह, ओ0पी0 सिंह, वाई0 के0 सिंह (2002) – अर्थशास्त्रीय गणित एवं प्रारम्भिक सांख्यिकी – राधा पब्लिकेसन्स, नई दिल्ली।
- D.R. Agarwal (2001) – Mathematics for Economists – Vrinda Publications (P) Ltd., Delhi.
- एस0एन0 लाल, एल0के0 चतुर्वेदी (2010) – परिमाणात्मक विष्लेषण, शिव पब्लिशिंग हाउस, इलाहाबाद।

इकाई – 9 आगत निर्गत सारिणी विश्लेषण

9.1 प्रस्तावना

पिछली इकाइयों में सांख्यिकी तकनीकों की विस्तारपूर्वक समीक्षा की गयी है। प्रस्तुत इकाई क्रियात्मक शोध तकनीकों के माध्यम से व्यवसायिक उपक्रम के अन्तर्गत प्रबन्धकों द्वारा समय–समय पर कार्यक्रमिक निर्णय लेने में सहायक होगी।

आगत निर्गत सारिणी विश्लेषण पिछले तीन दशकों से विकास नियोजन में एक महत्वपूर्ण भूमिका अदा कर रही है। यह तकनीक एक तरफ अर्थव्यवस्था की प्रकृति को समग्र रूप से समझने में तथा दूसरी ओर घरेलू अर्थव्यवस्था की सामाजिक आर्थिक उद्देश्यों बनाम बाहरी अर्थव्यवस्था के आर्थिक उद्देश्यों को चिन्हित करने में, नियोजित करने में तथा उसे लागू करने में अत्यन्त सहायक है।

यह तकनीक अर्थव्यवस्था के सामान्य सन्तुलन की व्याख्या करती है। तथा इस धारणा पर आधारित है कि समस्त अर्थव्यवस्था में औद्योग्कि अंतः सम्बन्ध और अन्तः निर्भरताएं होती हैं।

9.2 उद्देश्य

प्रस्तुत इकाई के अध्ययन से हम यह समझ सकेंगे कि

1.) आगत निर्गततकनीक किस पर आधारित है।
2.) आगत निर्गतसारणी किस प्रकार निर्मित होती है।
3.) आगत निर्गत गुणांक का परिकलन कैसे किया जाता है।
4.) लियोनतिफ का स्थैतिक आगत निर्गत खुला मॉडल क्या है और यह उनके आगत निर्गत बन्द मॉडल से किस रूप में भिन्न है।
5.) लियोनतिफ का प्रावैगिक मॉडल किस प्रकार से स्थैतिक आगत निर्गतमॉडल से भिन्न है।
6.) आगत निर्गत विश्लेषण की क्या सीमाएं है।

9.3 मुख्य भाग

9.3.1 आगत निर्गत विश्लेषण का इतिहास

आगत निर्गतविश्लेषण को सर्वप्रथम फ्रांसीसी अर्थशास्त्री केने (Quesnay) ने अपने सिद्धान्त Tableau Economique के अर्न्तग्त प्रस्तुत किया था। परन्तु इसका विकास *''आगत निर्गत पूंजी प्रवाह पद्धति''* के रूप में हारवर्ड विश्वविद्यालय के प्रो0 वैसिली. डब्लू.

लियोनतिफ (Wassily. W. Leontief) ने किया। इस आर्थिक विश्लेषण के क्षेत्र में महान योगदान के लिये उन्हे 1973 में नोबेल पुरस्कार भी प्रदान किया गया।

आगत निर्गत विश्लेषण को अन्तः औद्योगिक प्रवाह विश्लेषण या अन्तः औद्योगिक सम्बन्ध विश्लेषण, क्षेत्रीय प्रवाह विश्लेषण तथा बहु–क्षेत्रीय प्रवाह विश्लेषण भी कहा जाता है। आर्थिक विश्लेषण की इस विधि का प्रयोग अर्थव्यवस्था की परस्पर निर्भरताओं तथा जटिलताओं को समझने के लिये अन्तः उद्योग के अध्ययन हेतु किया जाता है। यह विश्लेषण अर्थव्यवस्था के सामान्य सन्तुलन की व्याख्या करते हुये विभिन्न क्षेत्रों में निर्गतों के आवंटन को प्रस्तुत भी करता है। लियोन्तिफ ने अमेरिका के लिये वर्ष 1919, 1929 एवं 1939 के लिये ऐसे ही सारिणियों का प्रस्तुतीकरण दिया था।

इस तकनीक का मूल आधार अर्थव्यवस्था के विभिन्न उद्योगें की परस्पर निर्भरता की मान्यता है जो आगत निर्गत के सम्बन्धों के रूप में उदय होती है। एक उद्योग की आग्त दूसरे की निर्गत होती है और विलोमशः भी। अंततः उनके परस्पर सम्बन्धों के फलस्वरूप समस्त अर्थव्यवस्था में पूर्ति और मांग का सन्तुलन स्थापित हो जाता है।

9.3.2 आगत निर्गत विश्लेषण की मान्यताएं

1.) सम्पूर्ण अर्थव्यवस्था दो क्षेत्रों में विभाजित है। अंतः उद्योग क्षेत्र और अंतिम मांग क्षेत्र सामान्यतः यह मान लेते हैं कि n उद्योग और n वस्तुएं हैं।
2.) प्रत्येक क्षेत्र का उप विभाजन किया जा सकता है।
3.) प्रत्येक उद्योग मात्र एक समांग वस्तु की समांग इकाइयों का उत्पादन करता है। यदि कोई उद्योग दो या अधिक वस्तुओं का एक निश्चित अनुपात में उत्पादन करता है, तो उन्हे एक समांग वस्तु के रूप में लिखा जा सकता है।
4.) किसी एक उद्योग का निर्गत किसी अन्य उद्योग के आगत के रूप में काम में लाया जाता है।
5.) उत्पादन की तकनीक समान रहती हैं
6.) आगत तथा निर्गत मुद्रा मूल्य के रूप में व्यक्त किये जाते हैं।
7.) उत्पादन की बाहय मितव्ययिताएं तथा अमितव्ययिताएं नहीं पायी जाती।
8.) अर्थव्यवस्था पूर्णतः सन्तुलित हैं

9.) सभी आगतों को एक स्थिर अनुपात में प्रयुक्त किया जाता है। दूसरे शब्दों में उत्पादन स्थिर प्रतिफल के नियम के अन्तर्गत होता है।

10.) श्रम एकमात्र प्राथमिक आगत है।

9.3.3 आर्थिक समस्या

आगत निर्गतविश्लेषण के अध्ययन में तीन महत्वपूर्ण बिन्दुओं को रेखांकित करना आवश्यक है।

1.) यह विश्लेषण उत्पादन से सम्बन्धित है। मांग फलन का कोई स्थान नहीं है। यहां समस्या तकनीकी है। एक उत्पादक प्रायः यह निर्धारित करने को उत्सुक होता है कि क्या उत्पादित करना है और कितनी मात्रा में आग्तों को उत्पादन क्रिया में प्रयुक्त करना है।

2.) यह विश्लेषण आनुभविक अनुसंधान पर आधारित है। यह विशेषता इसे वालरस के सामान्य संतुलन विश्लेषण से भिन्न करती है। आगत निर्गतमॉडल एक संकुचित मॉडल है क्योंकि यह उत्पादन पक्ष का ही अवलोकन करता है और अर्थव्यवस्था के मांग पक्ष की पूर्णतया अवहेलना करता है।

3.) इस तकनीक से ज्ञात किया ग्या निर्ग्त बाजार की संतुलन दशाओं का संतुष्ट नहीं करता है। यहां समान्य संतुलन विश्लेषण का प्रयोग मात्र आगत निर्गतविश्लेषण के अर्थव्यवस्था के विभिन्न क्षेत्रों के परस्पर निर्भरता के ही संदर्भ में लिया गया है।

यह अन्तः सम्बन्ध इसलिये उत्पन्न होता है क्योकि प्रत्येक उद्योग दूसरे उद्योग के निर्गत को आगत के रूप में प्रयुक्त करता है। उदाहरण के लियेः स्टील का प्रयोग रेलवे उद्योग एवं पेट्रोलियम उद्योग के द्वारा होता है। इसी प्रकार रेलवे और पेट्रोल स्टील उद्योग के द्वारा प्रयोग किया जाता है। अतः मूल समस्या इस बात को जानना है कि अंतिम उपभोग के लिये क्या बच सकता है और इस निर्गत की कितनी मात्रा उत्पादन प्रक्रिया के आगतों के रूप में प्रयोग की जाय जिससे कि ये शुद्ध निर्गत प्राप्त हो सके यदि मांग ब्यौरा प्राप्त हो जाय तो इस विश्लेषण का प्रयोग अग्रिम उत्पादन आवश्यकताओं की भविष्यवाणी में किया जा सकता है। आर्थिक नियोजन तथा पिछड़े इलाकों की आर्थिक विकास की समस्या में भी इस विश्लेषण का प्रयोग किया जा सकता है। इसका अत्यन्त महत्वपूर्ण प्रयोग राष्ट्रीय आय लेखांकन आव्यूह की रचना में है।

9.4 लियोनतिफ का आगत निर्गत मॉडल

आगत निर्गतविश्लेषण के अध्ययन हेतु लियोनतिफ ने मान्यताओं के आधार पर तीन मुख्य मॉडल को प्रस्तुत किया–

1.) लियोनतिफ का स्थैतिक आगत निर्गत खुला मॉडल
2.) लियोनतिफ का स्थैतिक आगत निर्गत बन्द मॉडल
3.) लियोनतिफ का प्रोवैगिक मॉडल

9.4.1 लियोनतिफ का स्थैतिक आगत निर्गतखुला मॉडल

खुले मॉडल के अन्तर्गत n उत्पादक क्षेत्रों द्वारा निर्मित n X n क्रम के आगत निर्गत व्यूह में खुला क्षेत्र (open sector) ले लिया जाता है। खुले क्षेत्र के अन्तर्गत तथ्यों की सूचना बाहरी रूप द्वारा प्राप्त होती है। तथा इसका सम्बन्ध अन्य उत्पादक क्षेत्रों से नहीं होता। अर्थात इसका तात्पर्य उस क्षेत्र से है जहां उद्योगें के प्राप्त निर्गतों के एक भाग कर पूर्ण रूप से उपभोग हेतु मांग की जाती है।

उदाहरणः

अर्थव्यवस्था तीन क्षेत्रों में विभाजित है। यहां पर ध्यान देने योग्य बात यह है कि कृषि एवं उद्योग अन्तः उद्योग के रूप में तथा घरेलू क्षेत्र को अंतिम क्षेत्र के रूप में प्रदर्शित किया गया है। आगत निर्गत सारिणी में तीनों क्षेत्रों के निर्गत को पंक्तियों (rows) द्वारा क्षैतिज रूप में दर्शाया गया है एवं इन क्षेत्रों के आगत को स्तम्भों (column) द्वारा लम्बवत् रूप में दर्शाया गया है।

प्रथम पंक्ति का कुल योग 300 इकाइयां है जो कृषि का कुल निर्गत प्रदर्शित करती है। इसमें से 50 इकाइयां स्वयं कृषि क्षेत्र में, 200 इकाइयां उद्योग तथा शेष 50 इकाइयां घरेलू क्षेत्र में आगत के रूप में प्रयोग में लाई जाती हैं।

सारिणी की द्वितीय पंक्ति में उद्योग क्षेत्र के कुल उत्पादन को प्रदर्शित किया गया है। उद्योग क्षेत्र में कुल 150 इकाइयों का उत्पादन होता है। जिसमें से 55 इकाइयां कृषि, 25 इकाइयां स्वयं उद्योग तथा 70 इकाइयां घरेलू क्षेत्र में प्रयुक्त होती हैं।

इसी प्रकार से स्तम्भों में इन क्षेत्रों के लागत को दर्शाया गया है। प्रथम स्तम्भ इस बात को सूचित करता है कि कृषि क्षेत्र में 300 इकाइयों का कुल उत्पादन करने के लिये 125 इकाइयों की लागत होती है, जिसमें से 50 इकाइयां स्वयं कृषि क्षेत्र से, 55 इकाइयां उद्योग

तथा 20 इकाइयां घरेलू क्षेत्र से आगत के रूप में काम में लाई जाती हैं। द्वितीय स्तम्भ यह दर्शाता है कि उद्योग की 150 इकाइयों के उत्पादन के लिये 225 इकाइयों के बराबर लागत लगाई जाती है। जिसमें से 200 इकाइयां कृषि, 25 इकाइयां स्वयं उद्योग तथा 30 इकाइयां घरेलू क्षेत्र से आगत के रूप में काम में लाई जाती हैं।

तृतीय स्तम्भ में शून्य यह प्रकट करता है कि घरेलू क्षेत्र उपभोग क्षेत्र है जो कुछ भी विक्रय नहीं करता।

सारिणी –1 : आगत निर्गत सारिणी

	क्षेत्र	क्रय क्षेत्र			कुल उत्पादन या कुल आय
		कृषि (1)	उद्योग (2)	अंतिम मांग (3)	
विक्रय क्षेत्र	1. कृषि	50	200	50	300
	2. उद्योग	55	25	70	150
	3. घरेलू	20	30	0	50
	कुल लागत	125	255	120	500

इस मॉडल में न सिर्फ विभिन्न उद्योगों के लिये आवश्यक आगतों पर अपितु उपभोक्ताओं द्वारा प्रस्तुत उपभोग मांग (अंतिम भोग) को भी प्रदर्शित किया गया है। अतः यह खुला मॉडल है।

उपर्युक्त सारिणी की सहायता से सामान्य प्रदेश व्यूह की रचना की जा सकती है।

सारिणी –2 : प्रदेश व्यूह

	क्षेत्र	क्रय क्षेत्र			कुल निर्गत
		कृषि (1)	उद्योग (2)	अंतिम मांग (3)	
विक्रय क्षेत्र	1. कृषि	X_{11}	X_{12}	D_1	X_1
	2. उद्योग	X_{21}	X_{22}	D_2	X_2
	3. घरेलू	X_{31}	X_{23}	O	X_3

स्तम्भों को लेने पर निम्न उत्पादन फलन बनेगा।

$$X_1 = f_1 (X_{11}, X_{21}, X_{31})$$

अथवा $300 = f_1 (50, 55, 20)$ (सारिणी 1 के अनुरूप)

$$X_2 = f_2 (X_{12}, X_{22}, X_{23})$$

अथवा $150 = f_2 (200, 25, 30)$

इसी प्रकार यदि 'n' उत्पादक क्षेत्र हैं तो क्षेत्र n का उत्पादन फलन इस प्रकार होगा

$$X_n = f_n (X_{1n}, X_{2n}, X_{3n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots X_{nn})$$

सारिणी की पंक्तियां प्रत्येक उत्पाद की मांग एवं पूर्ति के बीच समन्वय को प्रदर्शित करती हैं।

अर्थात $X_1 = X_{11} + X_{12} + D_1$

$$X_2 = X_{21} + X_{22} + D_2$$

$$X_3 = X_{31} + X_{32}$$

यदि अब यह मान लिया जाय कि i उद्योग का कुल उत्पादन n उद्योगों द्वारा आग्त के रूप में काम में लाया जाता है, तब ऐसी दशा में

$$X_i = X_{i1} + X_{i2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots X_{in} + D_i$$

चूंकि लियोनतिफ ने स्थिर तकनीकी गुणांक (आगत निर्गत अनुपात) की धारणा को स्वीकार किया है, अतः ऐसी दशा में तकनीकी गुणांक होगा –

$$a_{ij} = X_{ij} / X_j$$

यहां X_{ij} = i वां उद्योग का उत्पादन जो कि j वें उद्योग द्वारा काम में लाया जाता है।

X_{ij} = j वें उद्योग का कुल उत्पादन

तकनीकी व्यूह (आगत निर्गत गुणांक)

	क्षेत्र	क्रय क्षेत्र			कुल उत्पादन या कुल आय
		कृषि (1)	उद्योग (2)	अंतिम मांग (3)	
विक्रय क्षेत्र	1. कृषि	0.16	1.33	50	300
	2. उद्योग	0.18	0.16	70	150
	3. घरेलू	0.06	0.20	0	50

तकनीकी गुणांक

इसको आगत ज्ञात करने के लिये वांक्षित क्षेत्र के आगत में उस क्षेत्र के कुल उत्पादन का भाग दे दिया जाता है। उदाहरणार्थ, कृषि क्षेत्र का कुल उत्पादन 300 इकाइयां हैं तथा कृषि क्षेत्र का आगत 50, 55 तथा 20 इकाइयां हैं, ऐसी दशा में तकनीकी गुणांक 50/300 = 0.16 ,55/300 = 0.18 तथा 20/300 = 0.06 इसी प्रकार से दूसरे क्षेत्रों का तकनीकी गुणांक ज्ञात किया जा सकता है।

खुले मॉडल का उदाहरण

मान लीजिये एक सामान्य माडल है।

$$X_i = X_{i1} + X_{i2} + \dots\dots\dots\dots X_{in} + D_i$$

जहां $Xi = i$ वें क्षेत्र का कुल उत्पादन, $i = 1, 2, 3, \dots\dots\dots n$

$X_{ij} = i$ वें क्षेत्र के उत्पादन का वह भाग जो j वें क्षेत्र द्वारा आग्त के रूप में काम में लाया जाता है।

इस मॉडल को n क्षेत्रों के लिये इस प्रकार प्रस्तुत किया जा सकता है।

$$X_1 = X_{11} + X_{12} + \dots\dots\dots\dots X_{1n} + D_1$$

$$X_2 = X_{21} + X_{22} + \dots\dots\dots\dots X_{2n} + D_2$$

$$X_3 = X_{31} + X_{32} + \dots\dots\dots\dots X_{3n} + D_3$$

....

$$X_n = X_{n1} + X_{n2} + \dots\dots\dots\dots X_{nn} + D_n$$

तकनीकी गुणांक $= a_{ij} = X_{ij} / X_j$

$$X_{ij} = a_{ij}.X_j$$

$X_{11} = a_{11}X_1, X_{12} = a_{12}X_2$ आदि।

समीकरण इस प्रकार से होंगे

$$X_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots\dots\dots\dots a_{1n}X_n + D_1$$

$$X_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots\dots\dots\dots a_{2n}X_n + D_2$$

$$X_n = a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \, a_{nn}X_n + D_n$$

मॉडल को निम्नवत रूप में व्यक्त किया जा सकता हैः–

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + D_i$$

अथवा $X = AX + D$

यहां $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ . \\ . \\ X_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots\dots & a_{2n} \\ . & & & \\ & & & . \\ & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ . \\ \\ \\ D_n \end{bmatrix}$

अतः $D = X - AX = [I - A]\,X$

I = इकाई आव्यूह (Identity Matrix) है

A = आगत गुणांको का व्यूह (Impact Coeff. Matrix)

अतः $X = [I\text{-}A]^{-1} D$

$[I - A]^{-1}$ व्यूह $[I\text{-}A]$ का प्रतिलोम है।

9.4.2 लियोनतिफ का आगत निर्गतबन्द मॉडल

लियोनतिफ के आगत निर्गत खुले मॉडल के अन्तर्गत अन्तिम भोग क्षेत्र (घरेलू क्षेत्र) को वाहय रूप में प्रदर्शित किया गया था। परन्तु यदि इसका भी विलय एक उद्योग मानकर आर्थिक व्यवस्था में कर दिया जाय तो कोई भी क्षेत्र ऐसा नहीं रह जाता है जिसका सम्बन्ध वाहय क्षेत्र से हो।

घरेलू अथवा परिवार क्षेत्र जिसका आग्त उपभोग है तथा निर्गत श्रम है उसे भी आन्तरिक रूप से निर्धारित किया जाता है। ऐसी दशा में प्रत्येक वस्तु की प्रकृति माध्यमिक वस्तुओं जैसी होगी क्योंकि इस (n+1) उद्योग व्यवस्था से उत्पादित निर्गतों को इन्हीं निर्गतों के उत्पादन हेतु प्रयोग किया जाता है। इस दशा में आगत निर्गत मॉडल को एक बन्द मॉडल के रूप में देखा जा सकता है।

मान्यता

1.) यहां पूर्ण प्रयोगिकता की स्थिति विद्यमान मानी जाती है।
2.) साथ ही साथ किसी तरह का सरकारी हस्तक्षेप की संभावना को भी नकार दिया जाता है।
3.) बन्द मॉडल के अन्तर्गत विदेशी व्यापार तथा पूंजी निवेश सम्बन्धी समस्याओं एवं अन्य प्रावैगिक तत्वों की उपेक्षा कर दी जाती है।

यहां (n+1) उद्योगें में से प्रत्येक एक भिन्न निर्गत की X_i (i=1, ..., n+1) मात्रा का उत्पादन करता है। अंतिम क्षेत्र घरेलू क्षेत्र है, जिसका उत्पादन अथवा निर्गत X_{n+1} है। यहां X_{ij} = i वें उद्योग का निर्गत, जो j वें उद्योग को जाता है। X_{n+1}, i वें श्रम की वह मात्रा है जो कि i वें उद्योग में प्रयोग की जाती है।

बन्द मॉडल के सन्तुलन समीकरणों का प्रथम समूह

गणितीय रूप में बन्द मॉडल को इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं–

$$X_i = \sum_{j=1}^{n+1} X_{ij} \text{ -------------------- } (1)$$

$$(i= 1,2, ... n+1)$$

$$\sum X_{ij} = 0 \qquad \text{-------------------- } (2)$$

स्थिर तकनीकी गुणांक की दशा में

$$X_{ij} = a_{ij} X_i \qquad \text{----------------- } (3)$$

समी. (3) का मान समी0 (1) में रखने पर

n+1

$$X_i = \sum_{j=1} X_i$$

अथवा

$$X_j = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} X_i = 0 \text{ ----------------- } (4)$$

समी0 (4) सन्तुलन समी0 का प्रथम समूह है।

बन्द मॉडल के समीकरणों का द्वितीय समूह

इस द्वितीय समूह के अन्तर्गत हम मूल्यों Pi (j=1,2, ... n+1) पर विचार करते हैं। यहां Pi अन्तिम क्षेत्र (घरेलू क्षेत्र) की श्रम दर है।

यह मानते हुये कि प्रत्येक उद्योग में प्राप्तियां तथा लागतें समान है, सन्तुलन समी0 को निम्नवत व्युत्पादित किया जा सकता है। iवें उद्योग के लिये

प्राप्तियां $= X_i P_i$

तथा लागतें $$\sum_{j=1}^{n+1} P_i X_{ij} = \sum_{j=1}^{n+1} (a_{ij} X_i P_i)$$

जहां $X_{ij} = a_{ij} X_i$

सन्तुलन की दशा में

$$X_i P_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}.X_i P_i$$

अथवा $$X_i P_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}.X_i P_i = 0 \text{ ------------- } (5)$$

समी0 (5) सन्तुलन समी0 का द्वितीय सेट है।

9.4.3 लियोनतिफ का प्रावैगिक मॉडल

स्थैतिक मॉडल के अन्तर्गत अर्थव्यवस्था के विभिन्न क्षेत्रों के तकनीकी गुणांकों की सहायता से उनकी पारस्परिक निर्भरता का अध्ययन किया जाता है। परन्तु ये गुणांक अर्थव्यवस्था में स्टॉक की वास्तविक आवश्यकता पर प्रकाश नहीं डालते। न ही इस पर प्रकाश डालते हैं कि साधन की वह मात्रा जो उद्योग द्वारा खपत की जाती है के लिये कितनी पूंजी की आवश्यकता होगी। इस पूंजी की मांग स्थिर पूंजी विनियोग जैसे निर्माण, मशीन इत्यादि अथवा उत्पादन के लिये कच्चे माल का स्टॉक बनाये रखने के लिये की जाती है। अब यदि स्थैतिक आगत निर्गत मॉडल (खुला मॉडल) के अन्तर्गत पूंजी का प्रभाव सम्मिलित कर लिया जाय तब यह व्यवस्था गुणात्मक हो जाती है। अतः, पूंजी निवेशक प्रावैगिक आगत निर्गत मॉडल का एक विशिष्ट लक्षण है।

लियोनतिफ का प्रावैगिक आगत निर्गत मॉडल स्थैतिक मॉडल का सामान्यकिरण है अतः इसकी मान्यताऍं स्थैतिक मॉडल के अनुरूप होगी ।

1.) एक उद्योग एक ही समरूप वस्तु का उत्पादन करता है।
2.) उत्पत्ति की तकनीक दी हुयी है।
3.) उत्पत्ति के साधनो का संयोग स्थिर है।

मान लीजिये $Xi\ (t).t$ अवधि में t वें उद्योग के निर्गत का कुल प्रवाह है, जिसका प्रयोग तीन उद्देश्यों के लिये किया जाता है।

1.) अगली अवधि की उपभोग मॉग $Ci(t+1)$ के लिये
2.) n उद्योग में पूॅजी वस्तुओं के स्टॉक में शुद्ध वृद्धि करने के लिये $\Delta Si(t) = S(i)(t+1) - Si(t)$ जहां $Si(t)$ चालू अवधि t में पूंजी के संचित स्टॉक को प्रकट करता है तथा अगले वर्ष के स्टॉक को, मूल्य ह्रास को नहीं लिया जाता।
3.) उस अवधि में अर्थव्यवस्था के n उद्योगें $Xj1(t), Xj2(t)$ इत्यादि में उत्पादन के लिये।

इन दशाओं में सन्तुलन समी0 निम्नवत होगाः

$$Xi(t) = Ci(t+1) + Si(t+1) - Si(t) + Xi_1(t) + Xi_2(t)$$

अर्थव्यवस्था में कुल पूंजी स्टॉक समस्त उद्योगों के पूंजी स्टॉक का योग होगा

$$Si(t) = Si_1(t) + Si_2(t)$$

स्थैतिक मॉडल की ही भांति पूंजी गुणांक को निम्नवत व्युत्पन्न किया जा सकता हैः

$$bij = Sij/Xj$$

जहां $Sij = j$वें उद्योग के उत्पादन को i वें उद्योग द्वारा किया गया शोधन

$Xj = j$ वें उद्योग का कुल उत्पादन तथा bij = पूंजी गुणांक

bij गुणांक शून्य होने की दशा में प्रावैगिक मॉडल स्थैतिक मॉडल बन जाता है, क्योंकि इसका अर्थ है कि किसी स्टॉक की आवश्यकता नहीं है। bij न तो ऋणात्मक हो सकता है, न ही अनन्त। पूंजी गुणांक ऋणात्मक होने का अर्थ है कि आगत ही उद्योग की निर्गत होती है।

9.5 आगत निर्गत विश्लेषण की सीमाएं

1.) **मान्यताओं की अव्यावहारिकता :–**गुणांक   का स्थिर होना, अर्थव्यवस्था के सभी क्षेत्रों की पूंजी संरचना समान होना अवास्तविक है। क्योकि अधिक उत्पादन हेतु आग्तों में परिवर्तन सम्भव है और प्रत्येक क्षेत्र में पूंजी की मांग भिन्न ही होती है।

2.) **जटिलता–**अनेक संरचनात्मक समीकरण एवं गणितीय तकनीकों की सहायता लेने के लिये उच्च गणित तथा सांख्यिकीय विधियों का ज्ञान आवश्यक है जो अत्यन्त जटिल हैं

3.) **समरूप उत्पाद–**एक उद्योग में केवल समरूप अथवा समांग वस्तुओं का उत्पादन की मान्यता भी सही नहीं है क्योंकि आज एक ही उद्योग के अन्तर्गत कई प्रकार की वस्तुओं का उत्पादन किया जाना सम्भव है।

4.) **रेखीय सम्बन्धों का न होना–**

यह माना गया है कि एक उद्योग का आग्त दूसरे उद्योग का निर्गत है, अतः उद्योगों में रेखीय सम्बन्ध विद्यमान है जो तथ्यों के विपरीत है, क्योंकि साधनों कर अविभाज्यता के कारण निर्गत में वृद्धि सदैव आगत में वृद्धि के बराबर नहीं होती।

5.) **भौतिक इकाइयों का प्रयोग–**भौतिक इकाइयों के रूप में आगत निर्गत विश्लेषण के सन्तुलन समीकरणों द्वारा अर्थव्यवस्था का समुचित रूप में पूर्वानुमान लगना कठिन होता है। इसके अतिरिक्त विभिन्न वस्तुओं की भौतिक माप भी भिन्न होती है।

6.) **साधन प्रतिस्थापन की उपेक्षा**—तकनीकी गुणांक की स्थिरता की मान्यता का साधन प्रतिस्थापन की सम्भावनाओं को नकार देती है। परन्तु प्रतिस्थापन की सम्भावनाएं अल्प काल में भी बनी रहती हैं।

7.) **कुछ साधनों की उपेक्षा**—इस विश्लेषण में उत्पादन क्षेत्रों का निर्माण करते समय केवल उद्योगें को ही सम्मिलित किया जाता है। आगत निर्गत विश्लेषण बैंकिग सेवाओं तथा बीमा व्यवसाय आदि की अवहेलना करता है अथवा इन्हें अन्य क्षेत्रो में समाहित कर लेता है।

9.6 महत्व

आगत निर्गत विश्लेषण का नियेाजन एवं भारत के इस पंचवर्षीय योजनाओं में प्रयोग बहुता के साथ किया ग्या। एक सुनियोजित अर्थव्यवस्था उन त्रुटियों को दूर करने का प्रयास करता है जो एक गैर नियोजित अर्थव्यवस्था अन्तः उद्योग सम्बन्धों को मुक्त बाजार के भरोसे छोड़ देता है जो Trial and error के प्रयोग से इसमें सामन्जस्य स्थापित कर पाती है। वहीं दूसरी ओर एक सुनियोजित अर्थव्यवस्था इन जरूरी सम्बन्धों को पूर्ववत ही संचालित करके उद्योगों को उसी तरीके से निर्देशित कर देती है।

सोवियत यूनियन और कुछ दूसरी अर्थव्यवस्था ने (भारत सहित) नियोजन को एक बड़े पैमाने पर लागू किया जिससे कि अर्थव्यवस्था में गतियुक्त विकास हो सके।

लियोनतिफ के इस आगत निर्गतविश्लेषण को अन्तः उद्योगों सम्बन्धों के अतिरिक्त भी प्रयोग में लाया जा सकता है। जैसे कि देश अथवा देशों के प्रशासनिक क्षेत्रों के सन्दर्भ में। आगत निर्गत विश्लेषण में कुछ तकनीकी सुधार करके देश औद्योगिक एवं कृषि advancement को प्राप्त कर सकता है, यदि अर्थव्यवस्था के औद्योगिक क्षेत्र के विभिन्न क्षेत्रों के सम्बन्धों को सही प्रकार से जोड़ दिया जाय।

P.P.Pillai ने सर्वप्रथम केरल की अर्थव्यवस्था के लिये आगत निर्गत का ढांचा तैयार किया। इस ढांचे का विश्लेषण करने के लिये उन्होने 24 औद्योगिक क्षेत्रों को चिन्हित किया और 24 X 24 आगत निर्गत आव्यूह के लिये बड़े पैमाने पर आंकड़े एकत्रित करने की कठिनाई के कारण पिल्लई जी ने अपने अध्ययन को राज्य की अर्थव्यवस्था के औद्योगिक क्षेत्र तक ही सीमित किया और 17 क्षेत्रों को समावेश किया।

उनके अध्ययन का यह निष्कर्ष था कि केरल एक निश्चित रूप से खुली अर्थव्यवस्था है जो शेष भारत एवं दूसरे अन्य देशों के साथ व्यापार करती है।

सम्पूर्ण भारत स्तर पर Indian Statistical Institute द्वारा सन 1950–51 में आगत निर्गत सारिणी की शुरुआत हुयी। जिसमें अर्थव्यवस्था के बड़े क्षेत्रों की सीमित संख्या का अध्ययन किया ग्या क्योंकि पर्याप्त आंकड़े उपलब्ध नहीं थे। 36X36 का प्रदेश आव्यूह 1951–52 में तैयार किया गया जिसमें बाद में कुछ संशोधन किये ग्ये। 1952 में योजना आयोग ने CSO के माध्यम से आगत निर्गत विश्लेषण पर कार्य करना प्रारम्भ किया। 1960–61 में Long Run Planning Cell द्वारा एक आव्यूह तैयार किया गया।

पांचवी पंचवर्षीय योजना (1975–79) की उत्पादन लक्ष्य की draught outline 66X66 आव्यूह के आधार पर निर्धारित की ग्यी। साथ 4X4 आव्यूह को उत्पादन लक्ष्य तय करने के उद्देश्य से प्रयुक्त किया ग्या। अतः आगत निर्गत विश्लेषण, भारत की आर्थिक नियोजन में एक महत्वपूर्ण स्थान रखती है।

9.7 सारांश

फ्रांसीसी अर्थशास्त्री केने द्वारा प्रस्तुत किया गया आगत निर्गत विश्लेषण और तदुपरान्त इसको विकसित करते हुये लियोनतिफ द्वारा आर्थिक विश्लेषण की इस विधि का प्रयोग अर्थव्यवस्था की परस्पर निर्भरताओं और जटिलताओं को समझने के लिये अन्तः उद्योग के सम्बन्धों के अध्ययन हेतु किया गया।

इस विश्लेषण का आधार सम्पूर्ण अर्थव्यवस्था में औद्योगिक अन्तः सम्बन्ध और अर्न्तगत निर्भरताएं है। एक उद्योग का निर्गत दूसरे उद्योग के लिये आगत का स्वरूप ले लेता है।

लियोनतिफ ने स्थैतिक आगत निर्गत खुला एवं बन्द मॉडल के साथ गत्यात्मक आगत निर्गत मॉडल भी प्रस्तुत किया। स्थिर तकनीकी गुणांक के माध्यम से आगत निर्गत अनुपात की धारणा को स्वीकार किया। पूंजी का प्रभाव सम्मिलित करके प्रावैगिक आगत निर्गत मॉडल का एक विशिष्ट लक्षण प्रस्तुत किया।

9.8 शब्दावली

3.) **आगत** – उत्पादन क्रिया में प्रयुक्त होने वाली वस्तु।

4.) **निर्गत** – उत्पादन प्रक्रिया से निर्मित होने वाली वस्तु।

5.) **आगत निर्गत सारिणी** – विभिन्न क्षेत्रों के निर्ग्त को पंक्तियों द्वारा एंव आग्तों को स्तम्भों द्वारा प्रदर्शित करती सारिणी, जिसमें कुल उत्पादन एवं कुल लागत भी दर्शायी जाय।

6.) **प्रदेश व्यूह** – आगत निर्गत सारिणी की सहायता से सामान्य व्यूह जिसमें अर्थव्यवस्था के विभिन्न क्षेत्रों के उद्योगें को पंक्तियों और स्तम्भों में दर्शाया जाय जहां पंक्ति क्षेत्रों की मौद्रिक प्राप्तियां एवं स्तम्भ क्षेत्रों की कुल लागत को प्रदर्शित करते हैं। भौतिक रूप में पंक्ति निर्गत की पूर्ति या वितरण को प्रदर्शित करती है और स्तम्भ उद्योगों की आग्तों को।

7.) **आगत निर्गत बन्द मॉडल** – इसके अन्तर्गत घरेलू क्षेत्र अथवा अंतिम मांग क्षेत्र को वाहय रूप में प्रदर्शित करते हैं।

8.) **आगत निर्गत खुला मॉडल** – इसके अन्तर्गत उद्योगों से प्राप्त निर्गतों के एक भाग की पूर्ण रूप से उपभोग हेतु मांग की जाती है।

9.) **प्रावैगिक आगत निर्गतमॉडल** – यदि स्थैतिक आगत निर्गत मॉडल (खुला मॉडल) के अन्तर्गत पूंजी का प्रभाव सम्मिलित कर लिया जाय तब यह व्यवस्था गत्यात्मक हो जाती है।

9.9 अभ्यास प्रश्नों के उत्तर

1.) आगत निर्गत विश्लेषण से आप क्या समझते हैं ?

2.) आगत निर्गत विश्लेषण की क्या मान्यताएं हैं ?

3.) लियोनतिफ के आगत निर्गत खुला निदर्श की गणित द्वारा व्याख्या कीजिये।

4.) आगतनिर्गत विश्लेषण कोसर्वप्रथम प्रस्तुत करने वाले अर्थशास्त्री का नाम क्या था ?

5.) लियोनतिफ के आगत निर्गत पूंजी प्रवाह पद्धति का विकास करने के लिये उन्हे क्या सम्मान दिया गया ?

6.) प्रावैगिक आगत निर्गत मॉडल में किस की भूमिका एक विशिष्ट लक्षण का रूप लेती है ?

7.) तकनीकी गुणांक को और किस नाम से जाना जाता है ?

उत्तर 4. केने 5. 1973 का नोबेल पुरस्कार 6. पूंजी निवेश की 7. आगत निर्गत अनुपातं

9.10 सन्दर्भ सहित ग्रन्थ

1.) एस0 एम0 शुक्ला एवं सहायः (2004) परिणात्मक पद्धतियां, साहित्य भवन पब्लिकेशन्स, आगरा
2.) Agarwal.H.S: (1978) "A Mathematical Approval to Economic Theroy",LaXmi Narayan Agrawal, Agra
3.) Mehta.P.L: (2007) Managerial Economics, "Analysis, Problems & Cases", Sultan Chand & Sons, New Delhi

9.11 उपयोगी/सहायक ग्रन्थ

1. Kumar, Anil (2008) Statistical Research Methodology, Aifa Publishing House.
2. Singh,. S.P. ((2010) Principles of Statistics , S&Chand Publishing House .
3. Bhardwaj, R.S. (2000). Mathematics for Economics and Business, EXcel Books.
4. Bose, D. (2003), An Introduction to Mathematical Economics, Himalaya Publishing House.

9.12 निबन्धात्मक प्रश्न

1) आगत निर्गत विश्लेषण से आप क्या समझते है।
2) आगत निर्गत विश्लेषण की क्या मान्यताएं है।
3) लियोत्तिफ के आगत निर्गत खुला निदर्श की गणित द्वारा व्याख्या कीजिये।
4) निम्नलिखित आगत निर्गत सारणी से सम्बन्धित प्रावैधिक गुणांक सारणी बनाइये।

उद्योग	1	2	अंतिम योग	कुल उत्पादन
1	20	20	60	100
2	15	15	20	50
श्रम	10	15		

इकाई 10. रैखिक प्रोग्रामिंग

10.1 प्रस्तावना

पिछली इकाइयों में आपने सीमान्त विश्लेषण के विभिन्न पहलुओं का अध्ययन किया। किसी भी अर्थव्यवस्था की केन्द्रीय समस्या व्यवसाय में अधिकतम लाभ अर्जित करने की होती है। इस लक्ष्य की प्राप्ति करने हेतु, अर्थव्यवस्था में उपलब्ध सीमित साधनों का अनुकूलमत प्रयोग करना होता है। इन सीमित साधनों का विभिन्न क्षेत्रों में आवंटन करना, किसी भी अर्थव्यवस्था के लिये कठिनाई का कार्य होता है। सीमान्त विश्लेषण इन समस्याओं का समाधान करने में पूर्ण रूप से सफल नहीं हो सका।

प्रस्तुत इकाई में इन्ही व्यावहारिक समस्याओं का समाधान करने के उद्देश्य से रेखीय प्रायोजन तकनीक का विकास हुआ जो जटिल गणित के प्रयोग से उत्पादन की विभिन्न समस्याओं का हल करता है।

प्रस्तुत इकाई में रेखीय प्रोग्रामिंग की गणितीय तकनीक, उत्पत्ति एवं विकास, इसके अनुप्रयोग एवं ग्राफीय और सिम्पलेक्स विधि को उदाहरणों के माध्यम से विस्तार से समझाया गया है।

10.2 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप यह जान सकेंगें कि

7.) रेखीय प्रोग्रामिंग किस प्रकार उत्पादन निर्णयों में अधिक यर्थाथता लाता है।

8.) निश्चित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत लागत न्यूनतम एवं लाभ अधिकतम कैसे किया जा सकता है।

9.) रेखीय प्रोग्रामिंग समस्या के हल की ग्राफीय विधि एवं सिम्पलेक्स विधि का विस्तृत से अध्ययन कर सकेंगे।

10.) रेखीय प्रोग्रामिंग को उद्योग एवं व्यवसाय के अतिरिक्त अन्य किन क्षेत्रों में प्रमुख निर्णयन तकनीक के रूप में प्रयोग किया जाता है।

10.3 रेखीय प्रोग्रामिंग या रेखीय प्रायोजन की परिभाषा

रेखीय प्रायेाजन दो शब्दों से मिलकर बना है– रेखीय जिसका अर्थ है सरल रेखा एवं प्रायोजन जिसका तात्पर्य है सुव्यवस्थित योजना। रेखीय प्रायोजना एक ऐसी तकनीक है जो निश्चित प्रकार की समस्याओं, विशेषकर उत्पादन की समस्याओं के समाधान के लिये जटिल गणित का प्रयोग करती है। कोई भी फर्म अपने उत्पादन को अधिकतम करने के

लिये एक सुव्यवस्थित योजना का निर्माण करती है। एक निश्चित मात्रा का उत्पादन विभिन्न वैकल्पिक विधियों द्वारा हो सकता है परन्तु एक फर्म का उद्देश्य यही होता है कि कुछ निश्चित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत इस प्रकार का निर्णय करने में सहायक हो जिससे कि लागत न्यूनतम तथा लाभ अधिकतम प्राप्त हो सके। इसे न्यूनतम लागत संयोग की विधि के अन्तर्गत किया जाता है। रेखीय प्रोग्रामिंग द्वारा विभिन्न साधनों की उन मात्राओं का निर्धारण गणित की सहायता से किया जा सकता है जिससे कि वस्तु की एक निश्चित मात्रा का उत्पादन न्यूनतम लागत में संभव हो सके।

10.4 रेखीय प्रोग्रामिंग की उत्पत्ति एवं विकास

रेखीय प्रोग्रामिंग का सर्वप्रथम रूसी गणितज्ञ श्री एल0 बी0 कांत्रोविच ने प्रस्तुत किया। अन्य अर्थशास्त्री जिसमें डार्फमैन, कपूर तथा कूपमैन्स प्रमुख हैं, ने भी इस तकनीक के विकास में महत्वपूर्ण योगदान दिया। किन्तु इसका सर्वोत्तम विकास द्वितीय विश्व युद्ध के पश्चात् 1946 में अमेरिकन गणितज्ञ डी0 बी0 डैटजिग द्वारा किया गया। इन्होने रेखीय प्रायोजना तकनीक के माध्यम से गणितीय समस्याओं के समाधान की अपेक्षाकृत श्रेष्ठ विधि का आविष्कार किया।

10.5 रेखीय प्रोग्रामिंग के उद्देश्य

रेखीय प्रोग्रामिंग के निम्नलिखित उद्देश्य हैं–

1.) सबसे प्रमुख उद्देश्य उत्पादन क्रिया की इस समस्या का समाधान करना है कि लाभ कैसे अधिकतम किया जाय एवं लागत कैसे न्यूनतम की जाय।
2.) ऐसी नीति का विकास किया जाय जिससे अर्थव्यवस्था में भविष्य की मांग को पूरा करने के साथ–साथ उत्पादन योजना का निर्माण भी हो सके जिसमें अन्वेषण नीति की लागत को न्यनतम किया जा सके।
3.) आग्तों की आपूर्ति को सुनिश्चित करने के साथ–साथ उत्पादन में प्रयुक्त होने वाली मशीनों, श्रम आदि का पर्याप्त ढंग से वितरण किया जा सके जिससे कि इन संसाधनों का अनुकूलतम प्रयोग हो सके।
4.) उत्पादित होने वाली वस्तु की संख्या इस प्रकार निश्चित हो जिससे कि अधिकाधिक लाभ अर्जित किया जा सके।

5.) उत्पाद का सर्वोत्तम ढंग से विज्ञापनों के माध्यम से अधिकाधिक प्रचार हो। ऐसा करने के लिये विभिन्न विज्ञापन माध्यमों का उचित अनुपात में निश्चित विज्ञापन बजट निर्धारण करना भी इस तकनीक का उद्देश्य है।

6.) उत्पादन करने के साथ–साथ वितरण की व्यवस्था भी इस प्रकार हो जिससे कि परिवहन लागत न्यूनतम हो सके।

10.6 रेखीय प्रोग्रामिंग की आधारभूत मान्यताएं

1.रेखीय सम्बन्ध

स्थिर पैमानों के प्रतिफल नियम पर आधारित रेखीय प्रायोजना सरलता बनाये रखने के लिये रेखीय समीकरण द्वारा व्यक्त किया ग्या है। जिससे आग्त–निर्गत सम्बन्ध को एक सरल रेखा द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है। इसका अभिप्राय यह है कि उत्पादन फलन रेखीय समरूप होते हैं।

2.स्थिर कीमतें

यह मान लिया जाता है कि साधन तथा उत्पादन की कीमतें स्थिर रहती हैं। इससे किसी भी फर्म द्वारा अधिक या कम मात्रा में साधनों की मात्रा का प्रयोग करने से उनकी कीमतों पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है। उत्पादक द्वारा उत्पादन की मात्रा परिवर्तित करने से भी कीमतें अपरिवर्तित ही रहती हैं।

3.उद्देश्य फलन

किसी भी फर्म का लक्ष्य जैसे लाभ अधिकतम करना या लागत न्यूनतम करना ही उद्देश्य फलन अथवा वस्तुपरक फलन कहा जाता है। इसे मानदण्ड फलन भी कहते हैं। जिस रैखिक फलन की प्रोग्रामिंग होती है, उसे ही उद्देश्य फलन कहते हैं। इस फलन के दो भाग होते हैं– प्रमुख एवं द्वैत। यदि उद्देश्य फलन में उत्पादन को अधिकतम करना प्रमुख है तो लागत न्यूनतम करना द्वैत होता है।

4.अवरोध या प्रतिबन्ध

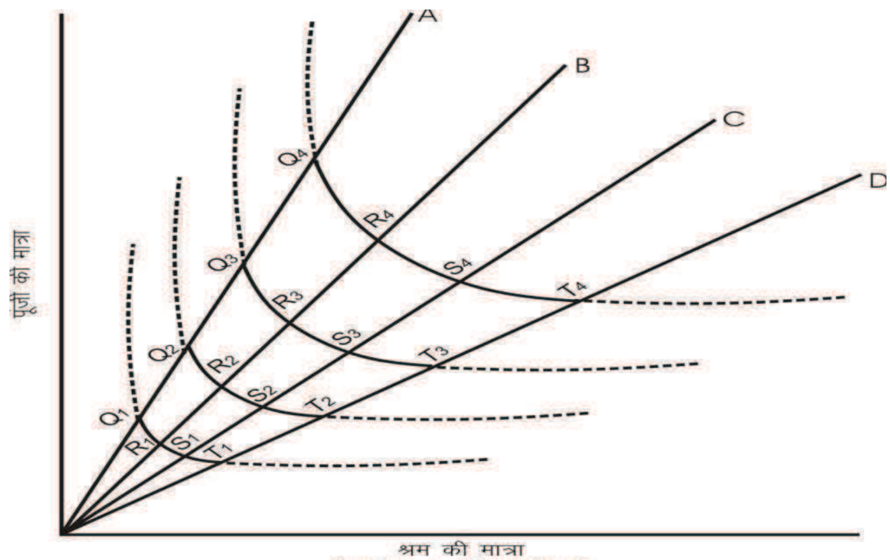
साधनो की उपलब्धता सीमित होने के कारण यह प्रतिबन्ध का रूप ले लेते हैं। इन्ही सीमित साधनों को प्रयुक्त करके ही लाभ अधिकतम या लागत न्यूनतम किया जा सकता है। प्रतिबन्धों को प्रायः असमानताएं या असमिका भी कहा जाता है क्योंकि इन्हे प्रायः असमानताओं के रूप में व्यक्त किया जाता है।

5.निर्माण प्रक्रिया के विकल्प

किसी कार्य को करने की विधि को प्रक्रिया कहते हैं। उत्पादन में प्रयुक्त साधनों के संयोग को उत्पादन प्रक्रिया कहते हैं। उत्पादन प्रक्रिया की एक से अधिक विधियां होनी चाहिये जिससे कि सर्वोत्तम विधि का चुनाव इस विधि के माध्यम से चुना जा सके।

6.प्रक्रिया किरणें

रेखीयता की मान्यता के अनुसार चूंकि प्रत्येक प्रक्रिया में श्रम तथा पूंजी का अनुपात स्थिर रहता है अर्थात साधन अनुपात स्थिर रहता है, अतः प्रत्येक प्रक्रिया को सरल रेखा द्वारा प्रकट किया जाता है। मूल बिन्दु से ऊपर दाहिनी ओर उठने वाली इस सरल रेखा को ही प्रक्रिया किरणें कहते हैं।



रेखाचित्र 1. प्रकिया किरणें

दिये गये रेखाचित्र 1 में X अक्ष पर श्रम की मात्रा एवं Y अक्ष पर पूंजी की मात्रा को लिया गया है। OA, OB, OC तथा OD प्रक्रिया किरणें हैं जो निश्चित श्रम–पूंजी संयोग को व्यक्त करते हैं। OA बिन्दु पर स्थित बिन्दु Q_1, Q_2, Q_3 तथा Q_4 यह प्रकट करते हैं कि उत्पादन प्रक्रिया में उत्पादन बढ़ाने पर श्रम–पूंजी की मात्रा किस प्रकार बदलेगी। जबकि उनका अनुपात समान रहता है। अतः Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 समान दूरी पर स्थित हैं।

प्रक्रिया किरण OA एक निश्चित श्रम तथा पूंजी के संयोग को व्यक्त करती है। इसी प्रकार OB, OC तथा OD भी भिन्न–भिन्न संयोगों को प्रकट करती हैं। परन्तु प्रत्येक प्रक्रिया किरण साधनों के एक निश्चित अनुपात को दर्शाती है। प्रत्येक प्रक्रिया किरण पर स्थित बिन्दु यह दर्शाते हैं कि उत्पादन बढ़ानें पर साधनों की मात्राएं किस प्रकार बदलेंगी, परन्तु उनमें अनुपात समान रहेगा।

इसी प्रकार प्रक्रिया किरण OB पर स्थित विभिन्न बिन्दु OR_1, OR_2, OR_3, OR_4 भी बराबर दूरी पर स्थित हैं। इसी प्रकार OC प्रक्रिया किरण पर स्थित OS_1, OS_2, OS_3 तथा OS_4 एवं OD प्रक्रिया किरण पर स्थित OT_1, OT_2, OT_3 तथा OT_4 भी बराबर दूरी पर स्थित है। Q_1, R_1, S_1 तथा T_1 बिन्दुओं को परस्पर सरल रेखाओं से मिलाने पर जो कोणदार वक्र प्राप्त होता है उसे समोत्पाद वक्र कहते हैं।

7. सुनिश्चितता

यह भी माना जाता है कि क्रियाविधि को ही नही बल्कि अवरोधों की भी निश्चित संख्या होनी चाहिये जिससे कि ग्णना सही प्रकार की जा सके।

8. योगात्मक – अलग– अलग क्रियाकलापों में प्रयुक्त किसी साधन की मात्राओं का योग सम्भव होना चाहिए।

9. विभाज्यता – अनुकूलतम हल प्राप्त करते समय निर्णय चरों को सतत माना जाता है अर्थात उनके भित्रात्मक मान हो सकते है।

10.सम्भाव्य क्षेत्र

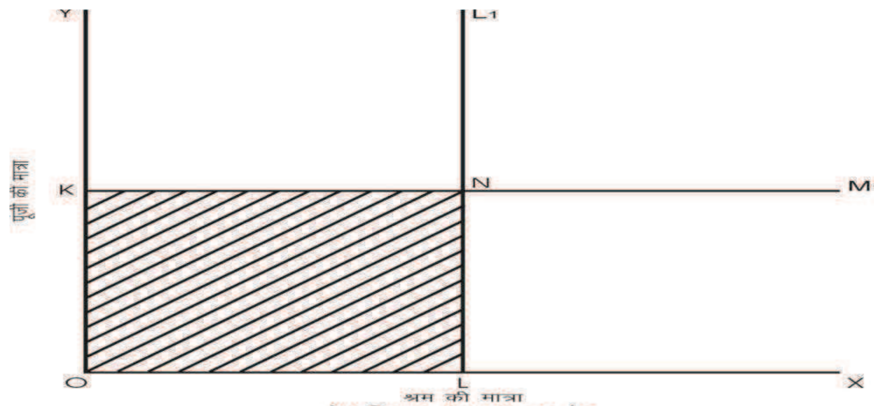
रैखिक समीकरणों के द्वारा प्राप्त किया ग्या ग्राफ जिसमे रेखीय कार्ययोजना की समस्या प्रतिबन्ध सम्मिलित हों, उस रेखीय कार्ययोजना की समस्या का सम्भाव्य क्षेत्र कहलाता है। सम्भाव्य क्षेत्र अवरोधों की संख्या एवं उनकी प्रकृति पर निर्भर करता है।

11.सम्भाव्य हल

सम्भाव्य क्षेत्र में स्थित प्रत्येक बिन्दु सम्भाव्य हल कहलाता है। दो साधनों की स्थिति में आगतों के वे सभी संयोग जो सम लागत रेखा पर अथवा उनकी बांयी ओर स्थित हैं, सम्भाव्य हल हैं। इसे एक रेखाचित्र से स्पष्ट किया जा सकता है।

मान लीजिये, एक उत्पादक के पास श्रम और पूंजी की एक निश्चित मात्रा उपलब्ध है। ये निश्चित मात्रा उत्पादन करने के प्रतिबन्ध अथवा परिसीमाएं हैं। रेखाचित्र 2 में श्रम की

OL मात्रा एवं पूंजी की OK मात्रा को लम्बवत एवं क्षैतिज सरल रेखा द्वारा क्रमशः दर्शाया गया है। ये दोनो रेखाएं एक दूसरे को ON पर काटती हैं। अतः OKNL क्षेत्र जिसे रेखांकित किया गया है, सम्भाव्य हल का क्षेत्र है।



रेखाचित्र 2. सम्भाव्य हल क्षेत्र

12.असम्भाव्य हल

ऐसा प्रत्येक बिन्दु जो सम्भाव्य क्षेत्र से बाहर हो, असम्भाव्य हल कहलाता है। ऐसा बिन्दु दी हुई कार्ययोजना के प्रतिबन्धों को स्वीकार नहीं करता है।

13. अनुकूलतम सम्भाव्य हल

अनेक सम्भाव्य हलों में से सर्वोत्तम हल को अनुकूलतम हल कहा जाता है, यह वह हल है, जो वस्तुपरक फलन को अधिकतम या न्यूनतम करता है। यह सम्भाव्य क्षेत्र पर स्थित वह बिन्दु है जिस पर उद्देश्य फलन का मान अधिकतम अथवा न्यूनतम होता है।

रेखीय प्रोग्रामिंग में अनुकूलतम हल ज्ञात करने की दो वैकल्पिक विधियां हैं–

1.) गैर गणितीय अथवा रेखाचित्रीय विधि

2.) सिम्पलेक्स विधि

रेखाचित्रीय विधि द्वारा रेखीय प्रायोजना की केवल सरल समस्याओं का अनुकूलतम हल प्राप्त किया जा सकता है, जबकि सिम्पलेक्स विधि के अन्तर्गत गणितीय समीकरणों द्वारा अनेक सम्भाव्य हलों की परीक्षा करके अपेक्षाकृत निर्बल हलों को क्रमशः त्याग दिया जाता है। जब तक कि एक अनुकूलतम हल न प्राप्त हो जाये। दो भिन्न तरीके होते हुए भी इनसे निकले परिणाम समान होते हैं।

10.7 ग्राफीय विधि के प्रमुख चरण

1. सर्वप्रथम रेखीय प्रायोजन समस्या का अवरोधों एवं उद्देश्य फलन के रूप में सूत्र प्रस्तुत करना चाहिये।
2. सभी दी हुयी असमिकाओं को समिका मान लेना चाहिये। समिकाओं अथवा असमिकाओं में X^2, y^2 या Xy के कोई पद नहीं होने चाहिये।
3. सुसंगत बहुभुज क्षेत्र सदैव प्रथम चतुर्थांश में होना चाहिये।
4. सभी समिकाओं एवं अवरोधों का ग्राफ बनाना होता है, जिसमें समिकाओं की संख्या के बराबर रेखाएं प्राप्त होती हैं।

इस प्रकार खींची गयी रेखाओं से परिबद्ध सुसंगत बहुभुज प्राप्त हो जाता है। बहुभुज की भुजाएं सभी अवरोधों को सन्तुष्ट करती हैं।

5. उद्देश्य फलन के अधिकतम अथवा न्यूनतम मान सुसंगत बहुभुज के क्षेत्र के शीर्षों पर ही होने चाहिये।
6. सुसंगत बहुभुज क्षेत्र के अन्तर्गत किसी बिन्दु पर उद्देश्य फलन का मान बहुभुज के किन्ही दो शीर्षों पर प्राप्त न्यूनतम तथा अधिकतम मानों के बीच प्राप्त होता है।

10.7.1 रेखीय प्रोग्रामिंग समस्या के हल की रेखाचित्रीय अथवा ग्राफीय विधि

इस ग्राफीय विधि में रैखिक समीकरणों के निकाय को हल करने की आवश्यकता होती है।

1.) रैखिक असमिका का ग्राफ–

माना $aX+by+c*o$ ------- (1)

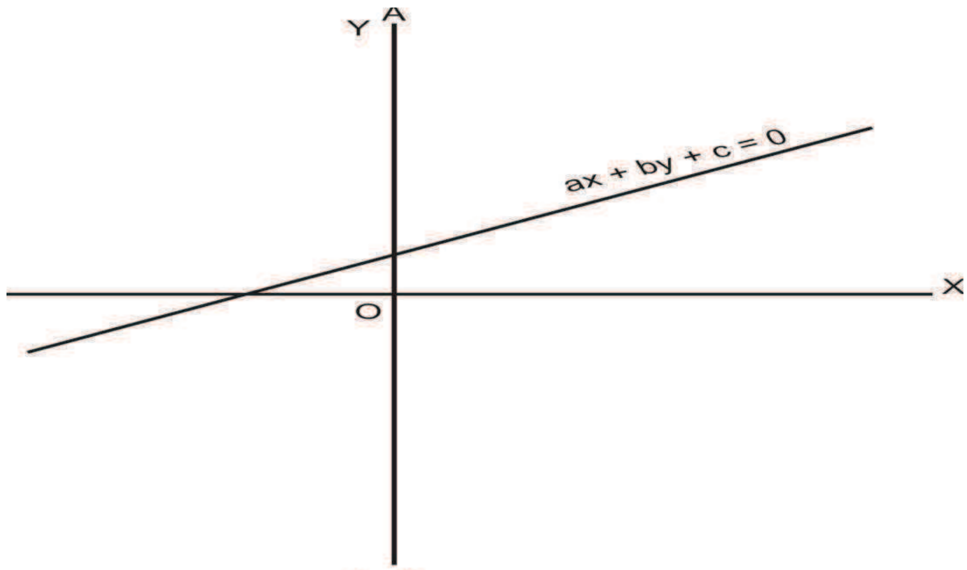
जहां पर X, y चर एवं a, b, c अचर मान हैं। चिन्ह * के स्थान पर $<$ या $\leq$ या $>$ या $\geq$ हो सकता है।

उपर्युक्त असमिका के अनुरूप रैखिक समीकरण निम्नलिखित है–

$aX + by + c = 0$ --------- (2)

इस समीकरण का ग्राफ खींचने के लिये X-y तल में कोई भी दो बिन्दु लेना पर्याप्त है जिसको मिलाने से प्राप्त रेखा ही इसका ग्राफ है। यह सरल रेखा X-y तल को दो भागें में विभाजित करती है जिसे अर्धतल कह सकते हैं। इन दो भागें मे से एक भाग निश्चित ही

रैखिक असमिका का ग्राफ है जिसे रेखाचित्र 3 में दर्शाया गया



रेखाचित्र 3

इन दो भागें में से कौन सा भाग असमिका(1) का ग्राफ है, इसके लिये एक बिन्दु Q लेते हैं जिसका मान (h, l) है जो X-y तल पर स्थित है किन्तु समीकरण (2) से प्राप्त सरल रेखा पर स्थित नहीं है। इस स्थित में दो सम्भावनाएं उत्पन्न होती हैं–

1.) प्रथम स्थिति–

यदि बिन्दु Q असमिका (1) को सन्तुष्ट करता है तो वह अर्धतल ही असमिका (1) का ग्राफ है, जिसमे Q बिन्दु स्थित

2.) द्वितीय स्थिति–

यदि बिन्दु Q असमिका (1) को सन्तुष्ट नहीं करता है तो दी हुयी असमिका का ग्राफ वह अर्धतल होता है जिसमें बिन्दु Q स्थित नहीं है।

10.7.2 पदार्थों का चयनः अधिकतम लाभ की प्राप्ति

उदाहरण –1

उद्देश्य फलन $z = 3X + 5y$ को निम्नलिखित अवरोधों के लिये अधिकतम कीजियेः–

$$X + 2y \leq 20$$

$$X - y \leq 15$$

$$X \geq 0$$

$y \geq 0$

हल : उद्देश्य फलन $z = 3X + 6y$ के लिये अवरोध हैः–

$X + 2y \leq 20$ ––––––– (1)

$X + y \leq 15$ –––––––––––(2)

$X \geq 0$ –––––––––––(3)

$y \geq 0$ –––––––––––(4)

अवरोध (1) के अनुरूप रेखीय समीकरण

$X + 2y = 20$ ––––––––––(5)

समी0 (5) में यदि $X=0$, तो $y = 10$

यदि $y = 0$ तो $X = 20$

अतः बिन्दु $(0,10)$ तथा $(20,0)$ समी0 (5) की ग्राफ रेखा पर स्थित है।

मूल बिन्दु इस रेखा पर स्थित नहीं है।

अब माना मूल बिन्दु समी0 (5) के अवरोध अर्थात $X+2y<=20$ के अर्धतल में स्थित है, तो

$0 + 2(0) \leq 20$

$0 \leq 20$

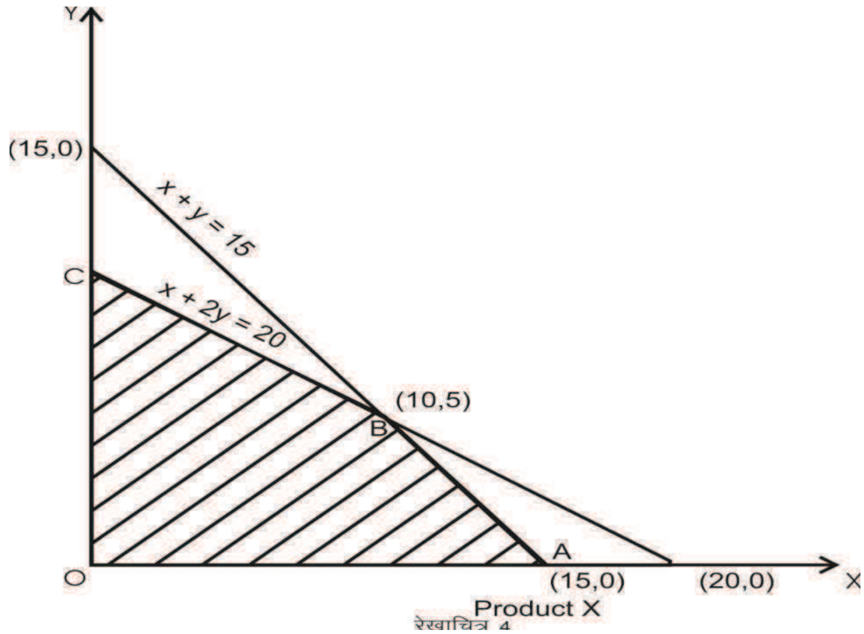
जो कि सत्य है।

अतः मूल बिन्दु अवरोध (1) के बन्द अर्धतल में स्थित है।

अवरोध (2) के अनुरूप रेखीय समी0

$X + y = 15$ –––––––––––––– (6)

समी0 (6) को हल करने पर दो बिन्दु $(0, 15)$ तथा $(15, 0)$ प्राप्त होते हैं। जिन्हे मिलाने पर समी0 (6) की ग्राफ रेखा प्राप्त होती है। इसी प्रकार मूल बिन्दु अवरोध (2) के भी बन्द अर्धतल में स्थित है। जो कि सत्य है।



रेखाचित्र 4

अतः यह रेखाचित्र से स्पष्ट होता है कि OABC ही सम्भाव्य हल क्षेत्र है।

उद्देश्य फलन $= Z = 3X + 5y$

बिन्दु O (0,0) लेने पर $Z = 3(0) + 5(0) = 0$

बिन्दु A (15, 0) लेने पर $Z = 3(15) + 5(0) = 45$

बिन्दु B (10,5) लेने पर $Z = 3(10) + 5(5) = 55$

बिन्दु C (0,10) लेने पर $Z = 3(0) + 5(10) = 50$

अतः उद्देश्य फलन $Z= 3X + 5y$ पर अधिकतम मान 55 है जब $X=10, y=5$ है।

उदाहरण 2

एक कम्पनी A तथा B दो प्रकार के खिलौने बनाती है। A की एक इकाई को बनाने में 4 घण्टे मशीन का समय तथा 4 घण्टे कारीग्र का समय लग्ता हैं। B की एक इकाई को बनाने में 6 घण्टे मशीन का समय तथा 2 घण्टे कारीगर का समय लगता हैं। कम्पनी के पास मशीनों की 180 घण्टे तथा कारीग्रों की 170 घण्टे की क्षमता है। A की एक इकाई पर 80 रूपये तथा B की एक इकाई पर 60 रूपये का लाभ होता है । यदि कम्पनी पूरी क्षमता से कार्य करें तो अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिये उसे A तथा B की कितनी इकाइयॉ बनानी चाहिये ?

हल–माना कम्पनी A की X इकाइयां तथा B की y इकाइयां बनाती है।

1.) खिलौनो की संख्या ऋणात्मक नहीं हो सकती, लेकिन शून्य हो सकती है। अतः $X \geq 0, y \geq 0$

2.) मशीनों के कुल घण्टे $= 4X + 6y$

3.) लेकिन 180 घण्टे के अवरोध के अनुसार

$$9X + 6y \leq 180$$

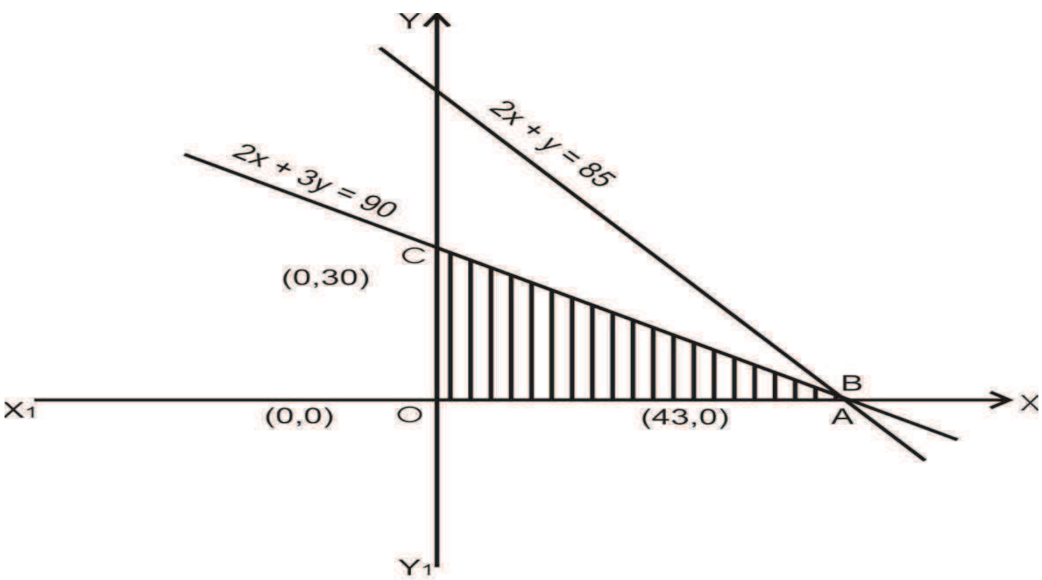
कारीगरों के कुल घण्टे $= 4X + 2y$

4.) लेकिन 170 घण्टे के अवरोध के अनुसार

$$4X + 2y \leq 85$$

5.) अधिकतम लाभ प्राप्त करना ही उद्देश्य फलन है। अतः

$$P = 80X + 60y$$



रेखाचित्र 5

सम्भाव्य हल क्षेत्र OABC से दर्शाया गया है।

इसके निर्देशांक क्रमश (0,0) (43,0) (41,3) तथा (0,30)

चूंकि लाभ $P = 80X + 60y$

बिन्दु O (0,0) पर $P = 80 \times 0 + 60 \times 0 = 0$

बिन्दु A (43,0) पर $P = 80 \times 43 + 60 \times 0 = 3440$

बिन्दु B (41,3) पर $P = 80 \times 41 + 60 \times 3 = 3460$

बिन्दु C (0,30) पर $P = 80 \times 0 + 60 \times 30 = 1800$

इन सभी मानों में P का अधिकतम मान 3460 है जो कि बिन्दु B पर प्राप्त होता है तथा A की 41 इकाइयां तथा B की 3 इकाइयां बनाने पर प्राप्त होती है।

10.7.3 लागत न्यूनतम करना

उदाहरण 3

एक डाक्टर अपने मरीज को प्रतिदिन अपने आहार में कम से कम 2000 इकाई विटामिन, 25 इकाई खनिज लवण तथा 700 इकाई कैलोरी लेने को परामर्श देता है। दो भोजन योग्य पदार्थ A तथा B उपलब्ध हैं जिनका मूल्य क्रमशः 4 रु तथा 3 रु प्रति इकाई है। A की प्रत्येक इकाई में 100 इकाई विटामिन, 0.5 इकाई खनिज लवण तथा 20 इकाई कैलोरी है। B की प्रत्येक इकाई में 50 इकाई विटामिन, 1 इकाई खनिज लवण तथा 20 इकाई कैलोरी है। मरीज को आवश्यक पोषक तत्व प्राप्त करने के लिये प्रत्येक प्रकार के आहार की कितनी इकाईयां लेनी चाहिये। इस समस्या की रैखिक कार्य योजना का गणितीय सूत्रण लिखिये। समस्या को ग्राफीय विधि से हल कीजिये।

हल–

1.) माना मरीज अपने आहार मे प्रतिदिन भोज्य पदार्थ A की X इकाई तथा B की y इकाई लेता है।

2.) भोज्य पदार्थ की इकाईयों की संख्या ऋणात्मक नहीं हो सकती है, लेकिन शून्य हो सकती है। अतः

$$X \geq 0, y \geq 0$$

3.) A की X इकाईयों से प्राप्त पोषण

विटामिन्स $= 100X$

खनिज लवण $= 0.5X$

कैलोरी $= 20X$

4.) B की y इकाईयों से प्राप्त पोषण

विटामिन्स $= 50y$

खनिज लवण $= 1y$

कैलोरी $= 20y$

5.) अवरोधों के अनुसार, विटामिन्स की मात्रा न्यूनतम 2000 इकाई होनी चाहिये। अतः

$2000 \leq$ A से विटामिन्स + B से विटामिन्स

$$2000 \leq 100X + 50y$$

$$100X + 50y \geq 2000$$

6.) पुनः प्रतिरोधों के अनुसार, खनिज लवण की न्यूनतम मात्रा 25 इकाई होनी चाहिये।

अतः $0.5X + y \geq 50$

7.) पुनः प्रतिरोधों के अनुसार, कैलोरी की न्यूनतम मात्रा 700 इकाई होनी चाहिये। अतः

$$20X + 20y \geq 700$$

8.) इस समस्या का उद्देश्य फलन व्यय को न्यूनतम रखना है। अतः

$$P = 4X + 3y$$

9.) अतः इस समस्या की रैखिक कार्य योजना का गणितीय सूत्रण इस प्रकार हैः–

$$X \geq 0$$

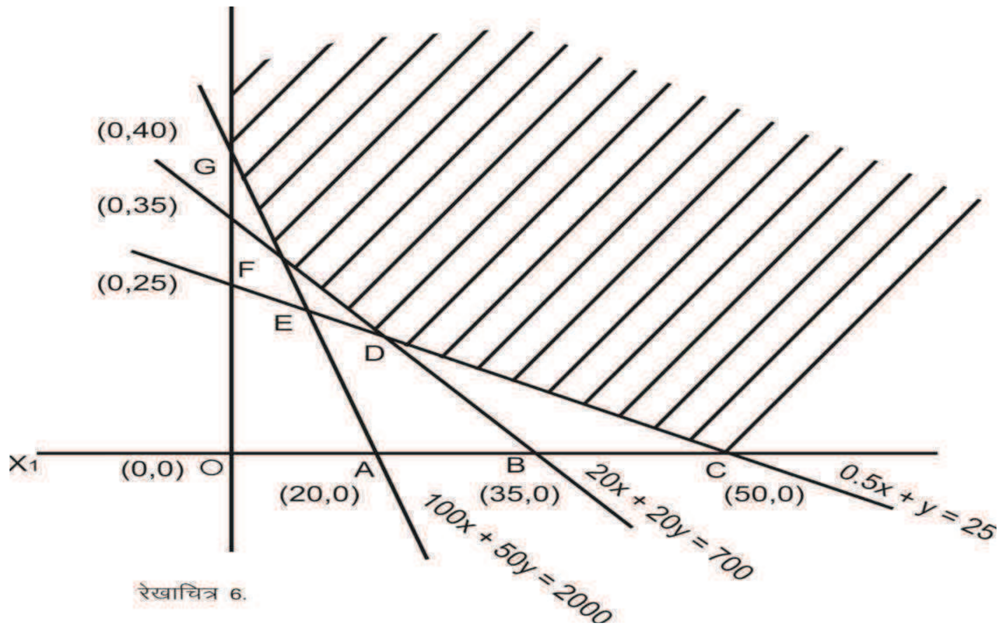
$$y \geq 0$$

$$100X + 50y \geq 2000$$

$$0.5X + y \geq 25$$

$$20X + 20y \geq 700$$

$$P = 4X + 3y$$



रेखाचित्र 6.

ग्राफ का रेखांकित असीमित क्षेत्र ही सम्भाव्य क्षेत्र है जिसका शीर्षों C, D, F, G मे से किन्ही एक या अधिक शीर्षों पर P का मान न्यूनतम होगा।

उद्देश्य फलन : P = 4X + 3y

बिन्दु C(50,0) पर = P = 4 X 50 + 3 X 0 = 200 रु.

बिन्दु D(20,15) पर = P = 4 X 20 + 3 X 15= 125 रु.

बिन्दु F(5,30) पर = P = 4 X 5 + 3 X 30=110 रु.

बिन्दु G(0,40) पर = P = 4 X 0 + 3 X 40= 120 रु.

अतः न्यूनतम व्यय 110 रु. जबकि मरीज A की 5 इकाई तथा B की 30 इकाई लेता है।

10.8 सिम्पलेक्स विधि

सिम्पलेक्स विधि का आविष्कार जार्ज बी डैन्जलिग ने 1947 में किया। इसके अन्तर्गत रेखीय प्रकमन समस्या को मानक रूप में लिखा जाता है। एक सम्भाव्य हल से प्रारम्भ किया जाता है और फिर पुनरावृत्ति विधि से हल में सुधार किया जाता है।

10.8.1 रेखीय प्रोग्रामिंग समस्या को सिम्पलेक्स विधि से हल करना

चरण 1

असमिका के रूप में प्रदत्त प्रत्येक रेखीय निबाध को समी0 में बदलें। इसके लिये **न्यूनतम चर स्लेक चर और अतिरेक चर सरप्लस चर** को प्रयुक्त किया जाता है। ये नये अऋणात्मक चर निबाध की असमिका के बाईं ओर जोड़े जाते है। यदि चिन्ह ($\leq$) का है और इन्हे **स्लेक चर** कहा जाता है। ये नये अऋणात्मक चर निबाध की असमिका के बांई ओर घटाये जाते हैं। यदि चिन्ह ($\geq$) का है और इन्हे ऋणात्मक स्लेक चर या **सरप्लस चर** कहते हैं।

प्रायः सरप्लस चर के स्थान पर स्लेक चर शब्द भी प्रयुक्त किया जाता है, परन्तु चिन्ह का ध्यान रखना होता है।

उदाहरण (1) रेखीय निबाध $2X_1 + 5X_2 <= 15$ को समी0 में बदलने के लिये स्लेक चर s_1 के बांई ओर जाड़ने पर,

$$2X_1 + 5X_2 + s_1 = 15$$

(2) रेखीय निबाध $3X_1 + 7X_2 >= 18$ को समी0 में बदलने के लिये सरप्लस चर s_2 को बाईं ओर घटाने पर,

$$3X_1 + 5X_2 - s_2 = 18$$

उद्देश्य फलन में स्लेक तथा सरप्लस चरों के गुणांक शून्य लिये जाते हैं। जैसेः

उद्देश्य फलन $Z = 8X_1 + 11X_2$ को

$$Z = 8X_1 + 11X_2 + 0.s_1 + 0.s_2$$

लिखा जायेग जिससे उद्देश्य फलन में इनका योगदान शून्य रहे।

चरण 2

प्रत्येक समी0 निबाध के दाईं ओर के अचर को धनात्मक बनायें। इसके लिये समी0 के दोनो ओर (-1) का गुणा करें।

जैसे– $3X_1 - 5X_2 + s_1 = -11$

$-3X_1 + 5X_2 - s_1 = 11$ लिखा जायेगा।

चरण 3

यदि किसी चर के लिये अऋणात्मक शर्त न दी गई हो तो उसे अऋणात्मक बनायें।

जैसे– X_2 को अऋणात्मक बनाने के लिये इसे दो चरों के अन्तर के रूप में लिखें–

$$X_2 = X_3 - X_4 \text{ या } X_2^* - X_2^{**} \text{ जहां } X_2^* \geq 0; X^{**} \geq 0$$

चरण 4

उद्देश्य फलन को अधिकतमकिरण के रूप में लिखें।

न्यूनतम कीजियेः $Z = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + c_nX_n$

अधिकतम कीजियेः $(-Z) = -c_1X_1 - c_2X_2 - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - c_nX_n$

परिकलन विधि

1.) स्लेक चरों की सहायता से असमिकाओं को समीकरणों में बदला जाता है।
2.) प्रदत्त सूचना को एक सारिणी में रखते हैं जिसे सिम्पलेक्स तालिका कहते हैं।
3.) एक प्रारम्भिक बेसिक सम्भाव्य हल का पता लगते हैं और आगे की प्रक्रिया शुरू करते हैं।
4.) इस हल का परीक्षण करते हैं और वह देखते हैं कि यह अनुकूलन है या नहीं।
5.) यदि यह हल अनुकूलतम नहीं होता तो संशोधित तालिका बनाई जाती है। इसके लिये अन्तर्गमन चर या प्रवेश करने वाले चर व बहिर्गमन या बाहर जाने वाले चर निश्चित करते हैं जिससे कि अग्ला हल निकाला जा सके।
6.) इस हल का परीक्षण करते हैं और यह देखते हैं कि यह अनुकूलतम है या नहीं।

दो चरों के लिये सिम्पलेक्स तालिका का खाका

माना उद्देश्य फलन, अधिकतम किरण $Z = c_1X_1 + c_2X_2 + 0.s_1 + 0.s_2$

दो निर्बाध $a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + 1.s_1 + 0.s_2 = b_1$

$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + 0.s_1 + 1.s_2 = b_2$

सिम्पलेक्स सारणी

c_B	c_j / आधार	c_1 x_1	c_2 x_2	0 s_1	0 s_2	x_B	अनुपात
0	s_1	a_{11}	a_{12}	1	0	b_1	न्यूनतम (कोरों)
0	s_2	a_{21}	a_{22}	0	1	b_2	
		बाडी आत्यूह		तत्समक आत्यूह			
	$\bar{c}_j = c_j - z_j$	$\bar{c}_1$	$\bar{c}_3$	$\bar{c}_4$	अधिकतम की कालम		Z= ___

स्पष्टीकरण

1.) **C_j पंक्ति या उद्देश्य पंक्ति**– उद्देश्य फलन के निर्णायक चरों, स्लेक चरों तथा सरप्लस चरों के गुणांक ।

2.) **C_B स्तम्भ या उद्देश्य पंक्ति**– उद्देश्य फलन में उन चरों के गुणांक जो तत्समक आव्यूह बनाते हैं।

3.) **आधार स्तम्भ**– इसमें वे बेसिक चर लिखे जाते हैं जिनके गुणांक स्तम्भ C_B में लिखे हैं। चरों का क्रम तत्समक आव्यूह में 1 के सामने होता है।

4.) **बॉडी आव्यूह**– निबाधों के बांई ओर के चरों के गुणांको द्वारा बनती है जो एक आव्यूह में नहीं हैं।

5.) **तत्समक आव्यूह**– बेसिक चरों के गुणांकों से निर्मित आव्यूह।

6.) **X_B स्तम्भ या मात्रा स्तम्भ**– आधार स्तम्भ में आये चरों का नाम।

7.) **सदिश पंक्ति**– बॉडी आव्यूह तथा तत्समक आव्यूह में आए चरों के संगत सदिश।

8.) **इण्डेक्स पंक्ति**– या शुद्ध मूल्यांकन पंक्ति या C_j पंक्ति

$$C_j = C_j - Z_j = C_j - C_B^{|}X_j$$

$= C_j - C_B$ और X_j का आन्तरिक गुणनफल बेसिक चरों के लिये $C_j = 0$, सदैव C_j के आधार पर अनुकूतम हल का परीक्षण किया जाता है।

a) यदि सभी $C_j \leq 0$, हल अनुकूलतम है।

यदि कोई भी $C_j > 0$ नहीं है, परन्तु कुछ शून्य हैं तब अन्य अनुकूलतम हल विद्यमान है।

यदि सभी $C_j < 0$ तब हल अद्वितीय अनुकूलतम हल है।

b) यदि $C_j > 0$ कुछ $_j$ के लिये तब हल अनुकूलतम नहीं है। अतः आगे पुनरावृत्ति की जायेगी।

c) यदि C_j के अधिकतम सम्भव मान के संगत स्तम्भ X_j के सभी अवयव ऋणात्मक या शून्य तो हल असमित है।

9.) **की स्तम्भ**– वह स्तम्भ जिसमें धनात्मक C_j अधिकतम है इसके संगत सदिश X_j प्रवेश करता है जिसे ऊपर की ओर तीर के $(\uparrow)$ का निशान लगकर व्यक्त करते हैं।

10.) **इण्डेक्स स्तम्भ**– या अनुपात स्तम्भ। इस स्तम्भ में अनुपात ज्ञात किया जाता है। जहां

पहली पंक्ति के लिये अनुपात $= b_1/$ संगत की स्तम्भ का मान

दूसरी पंक्ति के लिये अनुपात $= b_2/$ संगत की स्तम्भ का मान

11.) की पंक्ति या पायवट पंक्ति– वह पंक्ति जिसमें अऋणात्मक अनुपात सबसे कम है। $(\downarrow)$ से व्यक्त किया जायेगा।

12.) की फैक्टर या की अवयव– वह अवयव जो की कॉलम तथा की पंक्ति के कटान बिन्दु पर स्थित है मुख्य पंक्ति के नये मान लिखने के लिये इस संख्या को 1 में परिवर्तित कर लिया जाता है।

उदाहरण

निम्नलिखित रेखीय प्रकमन समस्या को सिम्पलेक्स विधि से हल कीजिये

अधिकतम कीजिये MaXimise $Z = 4X_1 + 5X_2$

$$2X_1 + 3X_2 \leq 24$$

$$2X_1 + X_2 \leq 16$$

तथा $X_1 + X_2 \geq 0$

हल– रेखीय प्रकमन समस्या का मानक रूप

अधिकतम कीजिये $Z = 4X_1 + 5X_2 + 0.s_1 + 0.s_2$

$$2X_1 + 3X_2 + 1.s_1 + 0.s_2 = 24$$

$$2X_1 + X_2 + 0.s_1 + 1.s_2 = 16$$

$$X_1, X_2 >= 0$$

सिम्पलेक्स सारणी

C_B	C_j / आधार हल के लिए चर	4	5	0	0	X_B मात्रा	अनुपात
		X_1	X_2	S_1	S_2		
0	S_1	2	$\boxed{3}$	1	0	24	$\frac{24}{3}=8$ न्यूनतम की पक्ति
0	S_2	2	1	0	1	16	$\frac{16}{1}=16$
		X_1	X_2	S_1	S_2		
		0	0	0	0		
$X_1=0$ $X_2=0$	$\overline{C}_j = C_j - Z$	4	5	U	0		$Z=0$
			अधिकतम की स्तम्भ				

प्रारम्भिक बेसिक सम्भाव्य हलः

$$X_1 = 0, X_2 = 0, s_1 = 24, s_2 = 16$$

$$Z_1 = C_B^{|} X_1 = [0\ 0]\ [2/2] = 0$$

$$Z_2 = C_B^{|} X_2 = [0\ 0]\ [3/1] = 0$$

$$Z_3 = C_B^{|} S_1 = [0\ 0]\ [1/0] = 0$$

$$Z_4 = C_B^{|} S_2 = [0\ 0]\ [0/1] = 0$$

चूंकि $C_1, C_2 \geq 0$ हल अनुकूलतम नहीं है। यहां C_2 अधिकतम है, अतः वेक्टर X_2 प्रवेश करेगा।

अतः अनुपात स्तम्भ में अनुपात ज्ञात करें। अनुपात S_1 के संगत न्यूनतम है अतः वेक्टर S_1 बाहर होग। की अवयव 3 है, नई पंक्ति बनाने के लिये निम्न क्रिया अपनायें।

तालिका (1) में पहली पंक्ति के प्रत्येक अवयव को 3 से भाग देने पर ''की पंक्ति'' के अवयव होंगेः

x_1	x_2	s_1	s_2	x_B
$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{24}{3}$
$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	8

दूसरी पंक्ति के अवयव होंगें:

x_1	x_2	s_1	s_2	x_B
$2-\frac{2}{3}$	$1-1$	$0-\frac{1}{3}$	$1-0$	$16-8$
4	0	$\frac{-1}{3}$	1	8

सिम्पलेक्स संशोधित सारणी – 2

C_B	आधार हल के लिए चर \ C_j	4 x_1	5 x_2	0 s_1	0 s_2	x_B	अनुपात
5	x_2	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	8	$8 \div \frac{2}{3}=12$
0	x_2	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{-1}{3}$	1	8	$8 \div \frac{4}{3}=6$ न्यूनतम की पक्ति
		x_1	x_2	s_1	s_2		
	z_j	$\frac{10}{3}$	5	$\frac{5}{3}$	0		
$x_1=0$ $x_1=0$	$\overline{C}_j=C_j-Z_j$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{-5}{3}$	0		$Z=40$

चूंकि $C_1>0$ है अतः हल $X_1=0$, $s_1=0$, $X_2=8$, $s_2=8$ अनुकूलतम हल नहीं है अर्थात उद्देश्य फलन के माने में और सुधार किया जा सकता है।

चूंकि C_1 अधिकतम है अतः' X_1 प्रवेश करने वाला वेक्टर होगा।

चूंकि अनुपात s_2 के संगत न्यूनतम है अतः बाहर जाने वाला वेक्टर s_2 होग। ''की'' अवयव 4/3 होगा।

पुनः संशोधित सारिणी की दूसरी पंक्ति निम्न प्रकार होगी।

x_1	x_2	s_1	s_2	x_B
$\frac{4}{3} / \frac{4}{3}$	$0 / \frac{4}{3}$	$\frac{-1}{3} / \frac{4}{3}$	$1 / \frac{4}{3}$	$8 / \frac{4}{3}$
1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	6

पहली पंक्ति निम्न प्रकार होगी

x_1	x_2	s_1	s_2	x_B
$\frac{2}{3} - 1 X \frac{2}{3}$	$1 - 0 X \frac{2}{3}$	$\frac{1}{3} - (-\frac{1}{4} X \frac{2}{3})$	$0 - \frac{3}{4} X \frac{2}{3}$	$8 - 6 X \frac{2}{3}$
0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	4

सिम्पलेक्स (संशोधित) तालिका (3)

सिम्पलेक्स (संशोधित) तालिका – 3

C_B	C_j / आधार हल के लिए चर	4 x_1	5 x_2	0 s_1	0 s_2	x_B	अनुपात
5	x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	4	कोई आवश्यकता नहीं
4	x_1	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	6	
		x_1	x_2	s_1	s_2		
	z_j	4	5	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$		
$s_1=0$ $s_2=0$	$\overline{C}_j = C_j - z_j$	0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$		Z = 44

वर्तमान हल $X_1 = 6, X_2 = 4, s_1 = 0, s_2 = 0$

$$Z = 4X_1 + 5X_2 + 0 + 0 = 24 + 20 = 44$$

चूंकि कोई भी C_1 धनात्मक नहीं है, अतः वर्तमान हल अनुकूलतम है। अर्थात $X_1 = 6, X_2 = 4$, Z अधिकतम = 44

10.9 रेखीय प्रोग्रामिंग समस्या का द्वैत

प्रत्येक रेखीय प्रक्रमन समस्या से सम्बन्धित एक दूसरी रेखीय प्रक्रमन समस्या होती है। जिसे पहली समस्या का द्वैत कहते हैं। इस समस्या में पहली समस्या को प्राथमिक या प्राइमल कहते हैं। किसी द्वैत का द्वैत स्वयं में प्राइमल होग। प्राथमिक द्वैत के जोड़े में किसी को भी प्राथमिक माना जा सकता है, फलस्वरूप दूसरी द्वैत होगी।

प्राथमिक द्वैत जोड़े के दो महत्वपूर्ण रूप हैं–

1.) सममित (Symmetric)

2.) असममित (Unsymmetric)

प्राथमिक द्वैत जोड़े को सममित रूप में कहा जाता है यदि सभी चर अऋणात्मक हैं तथा सभी निबाध असमिकाएं हैं। (<= अधिकतमकरण की स्थित में तथा >= न्यूनतम किरण की स्थित में) परन्तु प्राचलों a_{ij}, b_i, c_j के चिन्ह स्वैच्छिक हैं। अन्यथा इसे असममित रूप में कहा जाता है।

दूसरे वर्गीकरण के अनुसार प्राथमिक दो प्रकार के होते हैं–

1.) मिश्रित प्राथमिक रूप– यदि किसी प्राथमिक निबाधों मे समीकरण और असमिकाओं (किसी भी दिशा में) का मिश्रण हो, अऋणात्मक तथा अनियन्त्रित चर हो, तब इसे मिश्रित प्राथमिक रूप का कहा जाता है।

2.) मानक प्राथमिक रूप– यदि सभी निबाधों का एक प्रकार का चिन्ह हो, तो वह मानक प्राथमिक रूप का कहा जाता है।

10.9.1 किसी प्राथमिक का द्वैत बनाना

नियम

1.) मिले जुले प्रतिबन्धों को एक दिशा में बदलें, अधिकतम मान ज्ञात करने की स्थिति में (छोटा या बराबर <=) के रूप में तथा न्यूनतम मान ज्ञात करने की स्थिति में (बड़ा या बराबर >=) के रूप में रखें।

2.) असममित रूप को सममित रूप में बदलें। यदि कोई निबाध समीकरण के रूप में है तो उसे दो असमिकाओं के रूप में व्यक्त किया जाता सकता है।

यदि कोई दो चर चिन्ह में अनियन्त्रित हैं तो उसे दो धनात्मक चरों के अन्तर के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

3.) चर n और प्रतिबन्ध m हों तो

अधिकतम कीजिये $Z = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots\ldots c_nX_n$

जबकि $a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}X_n \le b_1$

$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n}X_n \le b_2$

....

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \text{............} + a_{mnxzn} \leq b_m$$

तथा $X_1, X_2 \text{.........} X_n \geq 0$

इसका द्वैत बनाने के लिये

1.) प्रत्येक प्राथमिक निर्बाध के लिये एक द्वैत चर परिभाषित

अर्थात m प्राथमिक निबाध –> m द्वैत चर

प्रत्येक द्वैत चर को $W_1, W_2 \text{.........}, W_m$ से व्यक्त कीजिये।

2.) अचर पद तथा उद्देश्य फलन के गुणांक ो को परस्पर बदलिये

अर्थात n प्राथमिक चर –> n द्वैत निबाध

गुणांक का आव्यूह A $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \text{..........} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \text{..........} & a_{2n} \end{pmatrix}$ का Transpose A_1^T ज्ञात कीजिये

$$\text{....................................}$$

$$a_{m1} \quad a_{m2} \quad \text{.........} a_{mn} \quad m \times n$$

$$A^T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \text{..........} & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \text{..........} & a_{m2} \\ \text{..........} & & & \end{pmatrix}$$

$$a_{1n} \quad a_{2n} \quad \text{.........} a_{mn} \quad n \times m$$

इस प्रकार प्राथमिक निबाधों के दांयी ओर के अचर द्वैत के उद्देश्य फलन के गुणांक होंगे तथा प्राथमिक उद्देश्य फलन में चरों के गुणांक द्वैत के निबाधों के दांयी ओर के अचर होंगे।

4.) निबाधों की दिशा बदले (अर्थात यदि प्राथमिक में चिन्ह $\geq$ है तो द्वैत में $\leq$ होगा तथा यदि प्राथमिक में चिन्ह $\leq$ है तो द्वैत में $\geq$ होगा।

5.) अनुकूलतम की दिशा बदलें (अधिकतम के लिये न्यूनतम तथा न्यूनतम के लिये अधिकतम)

इस प्रकार द्वैत निम्न प्रकार का होगा

न्यूनतम कीजिये $Z_D = b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots\ldots.. + b_mw_m$

$$a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{m1}w_m \geq c_1$$

$$a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \ldots\ldots\ldots\ a_{m2}w_m \geq c_2$$

$$a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \ldots\ldots.. + a_{mn}w_m \geq c_n$$

$$w_1, w_2 \ldots\ldots.., w_m \geq 0$$

तथा आव्यूह संकेतन में

यदि प्राथमिक, अधिकतम कीजिये $X= cX$

जबकि $AX \leq B$

तथा $X \geq 0$

तब द्वैतः न्यूनतम कीजिये $Z_D = B^Tw$

जबकि $A^Tw \geq C^T$

तथा $w \geq 0$

10.10 रैखिक प्रोग्रामिंग के लाभ

1.) सीमित एवं उपलब्ध संसाधनों का अनुकूलतम प्रयोग करने में यह प्रायोजन सहायक है।

2.) किसी उत्पादक के लिये इस प्रायोजन क द्वारा यह निर्णय लेना सुविधाजनक हो जाता है कि वह अपने उत्पादनों में किस प्रकार साधनों का चयन करे तथा सर्वोत्तम ढंग से किस प्रकार वितरण करे कि अनुकूलतम लाभ प्राप्त हो।

3.) तकनीक प्रबन्धन के अन्तर्गत किसी भी क्रियाविधि अथवा कार्य करने के एक से अधिक विकल्पों को चुनने में सहायता मिलती है।

4.) यह अर्थव्यवस्था की समस्याओं के सम्भव तथा व्यवहारिक हल प्रस्तुत करती है।

5.) यह विश्लेषण गणित का विस्तृत करता है जिसके कारण उत्पादन निर्णयों में अधिक यथार्थता आ जाती है।

6.) यह तकनीक यातायात लागत, आहार की लागत तथा व्यवसायिक जगत में अनेक वस्तुओं की उत्पादन लागत को न्यूनतम करने में प्रयुक्त की जाती है।

10.11 रेखीय प्रोग्रामिंग की सीमाएं

- रेखीय प्रोग्रामिंग तकनीक के अन्तर्गत चरों में रेखीय सम्बन्ध की कल्पना की जाती है जबकि व्यवहार में ऐसा कोई सम्बन्ध नहीं पाया जाता अपितु अरेखीय सम्बन्ध प्रायः देखने को मिलता है।
- वे समस्याएं जिनमें चर योज्य नहीं है, उनका हल तकनीक से नहीं किया जा सकता।
- इस तकनीक की संकल्पना "प्रतिफल निरन्तर प्राप्त होता रहता है" यथार्थवाची नहीं है।
- यह भी देखा गया है इस तकनीक से प्राप्त हल फर्म अथवा कम्पनी के लिय उचित नहीं हो।

10.12 सारांश

रैखिक प्रोग्रामिंग अनुकूलतम परिणाम प्राप्त करने के लिये एक गणितीय विधि है। यह उस तकनीक को कहते हैं जो कि उत्पादन में निर्णयात्मक समस्याओं का सर्वोत्तम हल ज्ञात करने में प्रयुक्त होते हैं। इस विधि को उपलब्ध सीमित साधनों के परस्पर प्रतिस्पर्धी क्रियाकलापों में अनुकूलतम प्रकार से आवंटन करने के लिये प्रयुक्त किया जाता है। जहां सभी चरों के बीच रेखीय सम्बन्धों के समीकरणों अथवा असमिकाओं के द्वारा दर्शाया जाता है।

किसी निर्णयाात्मक समस्या को रेखीय प्रोग्रामिंग के मॉडल में प्रस्तुत करने के लिये निर्णायक चरों को चिन्हित करना, उद्देश्य फलन को घोषित करना, निबाधों को परिभाषित करना, चरों का अऋणात्मक मान होना आदि चरणों को अपनाकर रेखीय मॉडल के रूप में प्रदर्शित किया जा सकता है। यह गणितीय विधि कुछ सीमाओं अथवा प्रतिबन्धों जैसे रेखीय, अऋणात्मक, योगात्मकता, विभाज्यता की शर्तों की मान्यता पर आधारित है।

रैखिक प्रोग्रामिंग को ग्राफीय विधि एवं सिम्पलेक्स विधि से हल किया जा सकता है। हर रेखीय प्रोग्रामिंग को एक दूसरी रेखीय प्रक्रमन समस्या होती है जिसे पहली समस्या का द्वैत कहते हैं।

10.13 शब्दावली

1.) **निर्णय चर**– सीमित साधनों के अन्तर्गत वस्तुओं की मात्रा को चरों द्वारा व्यक्त किया जाता है।
2.) **उद्देश्य फलन**– प्रयुक्त चरों में रेखीय फलन जिसका अधिकतमकरण तथा निम्नतीकरण किया जाता है।
3.) **निर्बाध**– अनुकूलतम हल निकालने के लिये जो सीमाएं निर्धारित की जाती है।
4.) **रेखीय एवं अ–ऋणात्मक शर्त**– उद्देश्य फलन तथा निबाध सभी निर्णय चर के रेखीय फलन है और यह निर्णय चर ऋणात्मक नहीं होने चाहिये।
5.) **सम्भाव्य हल**– चरों के ऐसे मानों का समुच्चय जो दिये हुए रेखीय प्रतिबन्धों के साथ साथ अऋणात्मक प्रतिबन्धों को भी सन्तुष्ट करता है, समस्या का सम्भाव्य हल कहलाता है।
6.) **अनुकूलतम हल**– वह सम्भाव्य हल जो दिये हुए उद्देश्य फलन का अधिकतम या न्यूनतम मान हो।

टिप्पणी–

रेखीय प्रक्रमन समस्या को हल करने में प्रायः निम्नलिखित स्थितियां हो सकती हैं–

1.) समस्या का कोई सम्भाव्य हल न हो।
2.) समस्या के अनेक हल हो।
3.) समस्या का सम्भाव्य हल असमि या अपरिबद्ध हो।

10.14 अभ्यास प्रश्नों के उत्तर

1.) रेखीय प्रोग्रामिंग की प्रमुख विशेषताएं क्या हैं ?
2.) रेखीय प्रोग्रामिंग का प्रतिपादन सर्वप्रथम किसने किया ?
3.) रेखीय प्रोग्रामिंग का विकास करने का श्रेय किस अर्थशास्त्री को जाता है ?
4.) रेखीय प्रोग्रामिंग शब्द का क्या तात्पर्य है ?
5.) रेखीय प्रोग्रामिंग को हल करने की कौन सी विधियां हैं ?
6.) सिम्पलेक्स विधि का आविष्कार किसने किया ?
7.) रेखीय प्रोग्रामिंग समस्या से सम्बन्धित दूसरी रेखीय प्रोग्रामिंग समस्या को क्या कहते हैं ?

उत्तर –

1.) (a) निर्णय चर (b) उद्देश्य फलन (c) निबाध (d) वैकल्पिक समाधन
(e) रेखीय एवं अऋणात्मक शर्त (f) योगात्मकता (g) विभाज्यता
(h) निर्धारित

2.) एल. बी. कान्टरोविच

3.) जी. बी. डान्टसिग

4.) रेखीय शब्द का तात्पर्य– दो या दो से अधिक चरों के मध्य रेखीय सम्बन्ध
प्रक्रमन का अर्थ– किसी समस्या का अनुकूलतम हल किसी व्यवस्था के अन्तर्गत किया गया है जिसकी एक निश्चित योजना है तथा गणितीय तकनीक पर आधारित है।

5.) ग्राफीय विधि एवं सिम्पलेक्स विधि

6.) जार्ज बी. डान्टसिग

7.) द्वैत

10.15 संदर्भ ग्रन्थ

- एस0 एम0 शुक्ला एवं सहायः (2004) परिणात्मक पद्धतियां, साहित्य भवन पब्लिकेशन्स, आगरा
- एच0 एस0 अग्रवाल : (1978) "A Mathematical Approval to Economic Theroy", LaXmi Narayan Agrawal, Agra
- पी0 एल0 मेहता : (2007) Managerial Economics, "Analysis, Problems & Cases", Sultan Chand & Sons, New Delhi

10.16 उपयोगी/सहायक ग्रन्थ

1.Kumar, Anil,(2008) Statistical Research Methodology, Aifa Publishing House.

2. Singh,S.P. ((2010) Principles of Statistics , S&Chand Publishing House .

3. Bhardwaj, R.S. (2000). Mathematics for Economics and Business, Excel Books.

4. Bose, D., (2003), An Introduction to Mathematical Economics, Himalaya Publishing House.

10.17 निबन्धात्मक प्रश्न

1.) रैखिक प्रोग्रामिंग के ग्राफ की विधि को एक सरल संख्यात्मक उदाहरण की सहायता से हल कीजिये।

2.) रेखीय प्रोग्रामिंग की उत्पत्ति एवं विकास पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिये।

3.) निम्नलिखित की परिभाषा लिखिये–

   1.) स्लेक तथा सरप्लस चर

   2.) बेसिक हल तथा बेसिक सम्भाव्य हल

4.) सिम्पलेक्स विधि किसे कहते हैं ? इसे हल करने की प्रक्रिया को लिखो।

5.) उद्देश्य फलन $z = 3X + 5y$ को निम्नलिखित अवरोधों के लिये अधिकतम कीजियेः–

$$X + 2y \leq 20$$

$$X + y \leq 15$$

$$X \geq 0$$

$$y \geq 0$$

इकाई 11 अनुकूलतम समीकरण निवर्चन एवं प्रयोग

11.1 प्रस्तावना

पिछली इकाइयों में अपने रैखिक प्रोग्रामिंग एवं आग्त–निर्ग्त विश्लेषण के माध्यम से यह ज्ञात किया कि अपने सीमित व निश्चित साधनों से अधिकतम लाभ कैसे अर्जित किया जाता है एवं अर्थव्यवस्था के विभिन्न उद्योगें की परस्पर निर्भरता की मान्यता को आग्त–निर्गत के सम्बन्ध के रूप में उदय होती है।

प्रस्तुत इकाई में अनुकूलतम समीकरणों से माध्यम से उस सर्वोतम क्रिया का निर्धारण करने का प्रयास किया जायेग जिससे वांछित उद्देश्य की प्राप्ति हो सके।

अवकलनों के माध्यम से ऐसे कई अनुकूलतम समस्याओं को हल करने का एक प्रयास किया जायेग। विभिनन अनुकूलतम तकनीकों का अवलोकन करके ऐसी समस्याओं का हल निकाला जायेग जिससे उत्पादन एवं उपभोक्ता के उद्देश्य की पूर्ति हो सकें।

11.2 उद्‍देश्य

प्रस्तुत इकाई के अध्ययन के बाद हम यह जान सकेंगे कि–

1– अनुकूलतम समीकरण क्या होते है।

2– विभिन्न अनुकूलतम तकनीक जिनके सहायता से आर्थिक समस्याओं को हल किया जा सकता है।

3– अवकलनों का अनुकूलतम समस्याओं में प्रयोग।

4– अधिकतमकरण एवं न्यूनतमीकरण जैसे आर्थिक समस्याओं के लिये अनुकूलतम समीकरण का प्रयोग।

11.3 मुख्य भाग

आदर्शवादी आर्थिक निर्णय विश्लेषण उन क्रियाओं को निर्धारिण करता है जो एक वांछित उद्देश्य को सर्वोत्तम ढंग से प्राप्त कर सके। इसका तात्पर्य है कि ऐसी क्रिया जो एक उद्देश्य फलन (अधिकतम या न्यूनतम) को अनुकूलतम कर सकें। उदाहरण के लिये एक कीमत–उत्पादन समस्या में, हम उस उत्पादन स्तर को निर्धारित करना चाहेंगे जहाँ लाभ अधिकतम हों। एक उत्पादन समस्या में आगतों के उन संयोगों को ज्ञात करना होता है जो उत्पादन के एक दिये हुए स्तर को न्यूनतम लागत में उत्पादित कर सकें। एक पूँजी बजट समस्या में निवेश के शुद्ध वर्तमान मान को अधिकतम करने वाले प्रोजेक्ट का चुनाव किया जा सकें। अनुकूलतम समस्याओं को हल करने के विभिन्न तकनीकें प्रयुक्त की जाती है।

अनुकूलतम तकनीक एक महत्वपूर्ण उपकरण है जो एक उद्यमी के साधनों को कुशलतम तरीकों से प्रयुक्त करके लाभ एवं धन को अधिकतम करता है।

समस्या का मूल रूप उन वैकल्पिक साधनों को चिन्हित करना है जिससे, निबाधों को ध्यान में रखते हुये,एक दिये हुये उद्देश्य फलन को प्राप्त किया जा सके और फिर उन साघनों में से उस वैकल्पिक को चयन करना जिससे कि उद्देश्य की प्राप्ति सबसे कुशलतम तरीके से हो सके,

गणितीय रूप में इस समस्या को निम्नलिखित रूप से प्रस्तुत किया जा सकता है।

अनुकुलतम कीजिये (optimize) $y = f(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$ ---------(A)

Subject to $b_j\,(X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots X_n) \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} b_j \ldots.j = 1, 2, \ldots. M$ ------(B)

समी० (A) उद्देश्य फलन है जबकि समी० (B) निबाधों के सेट को व्यक्त करता है। समस्या की प्रकृति को देखते हुये, अनुकूलतम का तात्पर्य उद्देश्य/फलन को अधिकतम करना या न्यूनतम करने से होता है। समी० (B) में चिन्ह इस बात को इंगित करते है कि हर निबाध समिका अथवा असमिका के सम्बन्ध का रूप ले सकता है।

11.3.1 अनुकूलतम करने में जटिल घटक –

बहुत सारे ऐसे घटक होते है जो अनुकूलतम समस्याओं को जटिल बना देते हैं और हल करने में मुश्किल पैदा करते है। ऐसा ही एक जटिल घटक है समस्या में बहु निर्णायक चर का विद्यमान होना। एक उत्पादक फर्म के लिये लाभ अधिकतम उत्पादन का निर्धारिण सरल ढंग से किया जा सकता है। परन्तु एक बड़ी फर्म अक्सर बड़ी तादाद में विभिन्न उत्पादों को उत्पाद करती है। फल स्वरूप के लिये ऐसी फर्म का लाभ अधिकतमकरण समस्या हर उत्पादन के लिये असंख्य उत्पादक निर्णयों की जरूरत होती हैं ।

दूसरा घटक जो ऐसी समस्या को हल करने में मुश्किल पैदा करती है वो है – निर्णायक चर एवं सम्बन्धित नतीजों के बीच जटिल प्रकृति का सम्बन्ध। उदाहरण के लिये – लोक नीति निर्णयों में ये निर्धारण करना अत्यन्त कठिन हो जाता है कि एक दिये हुये व्यय और बड़ी हुयी आय, रोजगार और उत्पादकता लाभ के बीच सम्बन्ध कैसे निर्धारण किया जाय। चरों के बीच कोई सरल सम्बन्ध नहीं विद्यमान होता।

तीसरा जटिल घटक है निर्णायक चर में एक या एक से अधिक जटिल निबाधों का विद्यमान होना। उदाहरणता वस्तुता हर संग्ठन में ऐसे सीमीत साधनो के निबाध होते है जो निर्धायक चर पर थोपे जाते है जैसे पूँजी, आदि जिन पर उनका वश होता है। इन निबाधों को निर्णायक समस्या में समाहित करना चाहिये नही ंतो अनुकूलतम तकनीक ऐसा हल प्रस्तुत करेग जो व्यावहारिक दृष्टि से अस्वीकृति होगा।

अन्य जटिल घटक है अनिश्चितता का होना। प्रस्तुत अध्ययन में हम निर्णय करने के विश्लेषण को निश्चितता तक ही सीमित करेगें।

11.3.2 निर्बाध एवं अबाध अनुकूलतम

अबाध अनुकूलतम तकनीक के अन्तर्गत समस्या के निर्णायक चरों में कोई भी प्रतिबन्ध नहीं रखा जाता और अवकलन के माध्यम से उसका विश्लेषण किया जाता है। दूसरा अत्यन्त सरल रूप जिससे कि अनुकूलतम समस्या का निवारण किया जा सकता है, वो है समस्या के प्रतिबन्धों को बराबरी अथवा समिका समबन्ध द्वारा स्पष्ट करना।

निर्बाध अनुकूलतम समस्या को लेग्रेनजियन गुणक (lagrangian Mulliplier) द्वारा ज्ञात किया जा सकता है। अक्सर हालांकि, आर्थिक निर्णय चरों में निबाध एक असमिका सम्बन्ध का रूप ले लेते हैं।

रैखिक प्रायोजन समस्या उत्पादन में निर्णयात्मक समस्याओं का सर्वोत्तम हल करने में प्रयुक्त होती है इसके अन्तर्गत, दोनों ही उद्देश्य एवं निबाध सम्बन्धों को निर्णय चेरों के रेखीय सम्बन्ध द्वारा किया जाता है। इसके अलावा द्विघाती प्रायोजन समस्या भी होती है जहाँ उद्देश्य फलन निर्णय चरों का द्विघाती रूप ले लेती है।

11.4 अवकलन

एक लाभ अधिकतम उदाहरण में सीमान्त विश्लेषण धारणा यह स्पष्ट करता है कि उद्देश्य और निर्णय चरों के सम्बन्ध को सारणी या रेखा चित्र के द्वारा व्यक्त किया जा सकता है। यह धारणा तब जटिल हो जाती है जब कई निर्णायक चर होते है या फिर निर्णय चर एवं उद्देश्य फलन के मध्य सम्बन्ध को बीजगणितीय रूप में व्यक्त किया जाता है, अवकलन केत्र महत्वपूर्ण रूपों को समस्या के अनुकूलतम हलों को ज्ञात करने के लिये किया जा सकता है।

11.4.1 सीमान्त विश्लेषण एवं अवकलन सम्बन्ध

मान लिजिये कि एक उद्देश्य फलन है, Y को अनुकूलतम करना जिसे बीजगणितीय रूप में निर्णायक चर X के फलन के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$$Y = f(X)$$

सीमान्त लाभ – उत्पादन की एक अतिरिक्त इकाई में परिवर्तन करने से लाभ में होने वाला परिवर्तन सीमान्त लाभ होता है। सामान्य रूप में किसी चर Y के सीमान्त मान को जो अन्य चर X का फलन है। उसे X इकाई में एक इकाई परिवर्तन करने पर Y में होने वाले परिवर्तन के द्वारा परिभाषित किया जा सकता है।

Y, (M_y) के सीमान्त मान को Y, (Δ y) में होने वाले परिवर्तन के द्वारा निकाला जा सकता है। जो X, (Δ X) में दिये गये परिवर्तन के फलस्वरूप होता है।

$$M_y = \Delta y / \Delta X$$

इस दिये गये व्यक्तत्व की गणना करने पर X के परिवर्तन के आकार के परिवर्तन पर निर्भर करते हुए Y के सीमान्त मान के विभिन्न मान प्राप्त होते है।

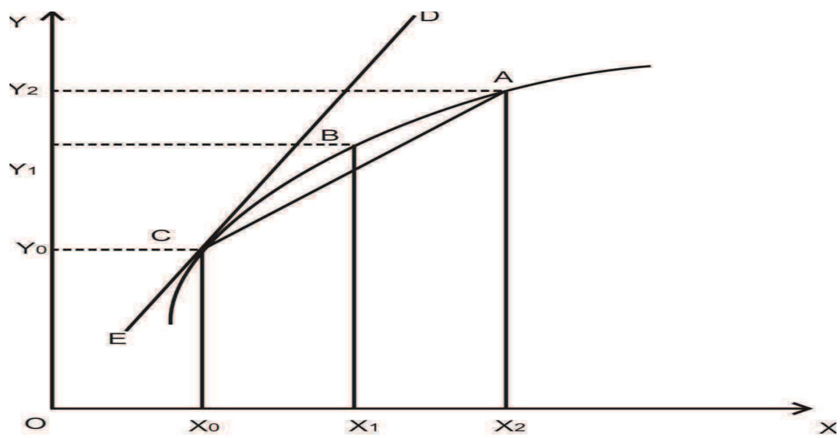
यदि Δ X एक सतत चर जो विभिन्न fractional मान ले सकता है, तो M_y की ग्णना करते समय हम यह मान सकते है कि Δ X शून्य तक जा सकता है। अवधारणा में इस विचार को अवकलन कहा जाता है।

फलन का पहला अवकलज को परिभाषित करते हुये $\Delta y / \Delta X$ के अनुपात को सीमित करना है जैसे ΔX शून्य की ओर बढता है।

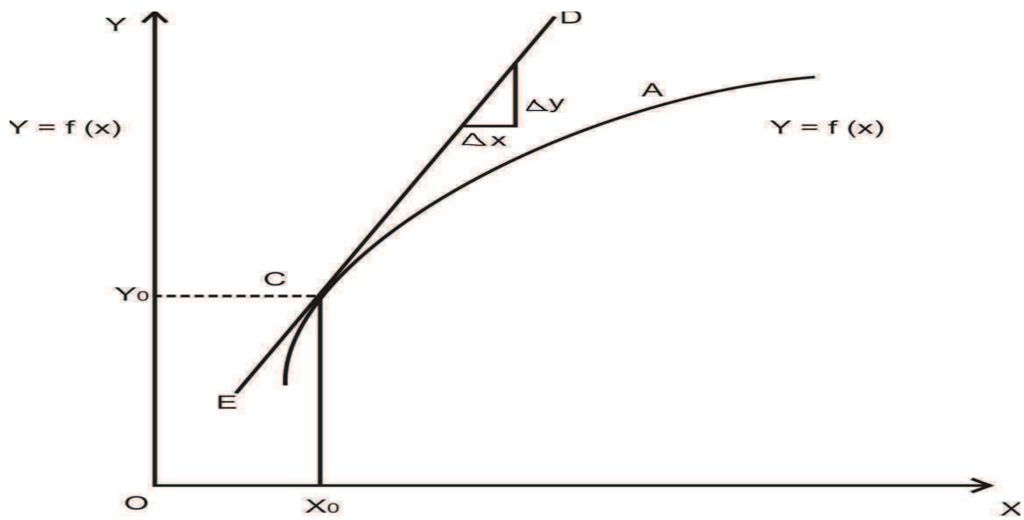
$$dy / dX = \text{limit } \Delta y / \Delta X$$

$$\Delta X \rightarrow 0$$

ग्राफीकीय विधि से किसी भी फलन का पहला अवकलन उस दिये गये वक्र के ढाल के द्वारा व्यक्त किया जा सकता है। मान लीजिये, हम बिन्दु X_o पर Y = f (X) का अवकलन निकालना चाहते है। dy / dX tangent रेखा CD की ढाल को मापती है।



Marginal Charge in Y -f (x) as
Δ x approaches o



Measurement of the slope Y = f (x)
at pt.C

उदाहरण के लिये ,यदि Y की सीमान्त माप की गणना एक सूक्ष्म अंतराल X_o से X_1 से की जाय तो रेखा C से B की ढाल बराबर होगी –

$$M_{"y} = \Delta y / \Delta X$$

$$= Y_1 - Y_0 / X_1 - X_0$$

यह ECD tangent रेखा की ढाल को व्यक्त करने की एक बेहतर गणना करती है। अतः हम देखते है कि ΔX का मान जितना कम होगा, वक्र की ढाल का अधिक बेहतर प्रस्तुतीकरण हो सकेगा। जब $\Delta X \rightarrow 0$ है तो C बिन्दु पर $Y = f(X)$ वक्र का ढाल पता किया जा सकता है।

11.5 अवकलन की प्रक्रिया

अवकलन की प्रक्रिया – अर्थात फलन के अवकलन को ज्ञात करना $\Delta Y/\Delta X$ के अनुपात के सीमित मान को निर्धारित करने में निहित है। एक फलन के अवकलन को ज्ञात करने के लिये, बीज गणित प्रक्रिया के माध्यम से इसको प्राप्त कर सकते है। इस प्रक्रिया के विशिष्टि नियमों को नीचे प्रस्तुत किया जा रहा है।

मान लीजिये लाभ को उत्पादन मात्रा के फलन में व्यक्त कर सकते हैं।

$$\pi = -40 + 140Q - 10Q^2 \qquad \text{------ 1}$$

$d\pi/dQ$ को ज्ञात करने के लिये सर्वप्रथम सीमान्त लाभ $\Delta\pi/\Delta Q$ को ज्ञात करेगें जैसे$\Delta Q \rightarrow 0$

मान लीजिये लाभ का नया स्तर $(\pi + \Delta\pi)$ पर व्यक्त करने पर उत्पादन में वृद्धि$(Q + \Delta Q)$

समी० 1 से यह ज्ञात है कि

$$(\pi + \Delta\pi) = -40 + 140\,(Q + \Delta Q) - 10\,(Q + \Delta Q)^2 \qquad \text{----- 2}$$

इस समीकरण को विस्तार करने पर और फिर बीजगणित द्वारा हल करने पर

$$(\pi + \Delta\pi) == -40 + 140Q + 140\Delta Q - 10\,[Q^2 + 2Q\Delta Q + (\Delta Q)^2]$$

$$= -40 + 140Q - 10\,Q^2 + 140\Delta Q - 20Q\Delta Q - 10(\Delta Q)^2 \text{-------}3$$

समी० 3 को समी० 1 से हटाने पर

$$\Delta\pi = 140\,\Delta Q - 20Q\,\Delta Q - 10\,(\Delta Q)^2$$

सीमान्त लाभ अनुपात $\Delta\pi/\Delta Q$ बनाने पर –

$$\Delta\pi/\Delta Q = [140\Delta Q - 20Q\Delta Q - 10(\Delta Q)^2]/\,\Delta Q$$

$$= 140 - 20Q - 10\,\Delta Q \qquad \text{-------- 4}$$

समी० 4 की सीमा लेते हुये जैसे जैसे Q शून्य की ओर अग्रसर होता है, लाभ फलन को अवकलन के रूपजी में इस प्रकार व्यक्त कर सकते है।

$$d\pi/dQ = \text{limit}\,[140 - 20Q - 10\Delta Q]\ \Delta Q \rightarrow 0$$

$$= 140 - 2\,Q \qquad \text{---------5}$$

यदि हमें Q के किसी निश्चित मान पर लाभ फलन का अवकलन निकालना हो तो समी० 5 को इस मान के लिये व्याख्या कर सकते है। यदि Q = 3 units पर लाभ फलन की ढाल अर्थात सीमान्त लाभ कितना होग तो Q = 3 को समी० 5 में प्रतिस्थापित करने पर

$$\partial\pi/\partial Q = 140 - 20\ (3) = \text{Rs } 80 \text{ प्रति इकाई}$$

11.5.1 अवकलन के नियम

सामान्य नियमों की एक श्रृंखला, उपर्युक्त प्रक्रिया से व्युत्पन्न विभिन्न प्रकार के फलनों को अवकलन करने के लिए विद्यमान हैः

स्थिर फलन – स्थिर फलन को इस रूप में व्यक्त कर सकते है।

$$Y = a$$

जहाँ a स्थिरांक है (अर्थात Y, X से स्वतन्त्र है)। स्थिर फलन का अवकलन शून्य के बराबर होता है

$$dy / dy = 0$$

उदाहरण के लिये, स्थिर फलन :

$$Y = 4$$

को ग्राफ A में दिखाया ग्या है। क्योंकि यह स्थिर फलन अक्ष की समान्तर रेखा है जिसकी ढाल शून्य है। अतः इसका अवकलन (dy/dX)शून्य के बराबर है।

घात फलन – घात फलन का रूपजी है।

$$Y = aX^b$$

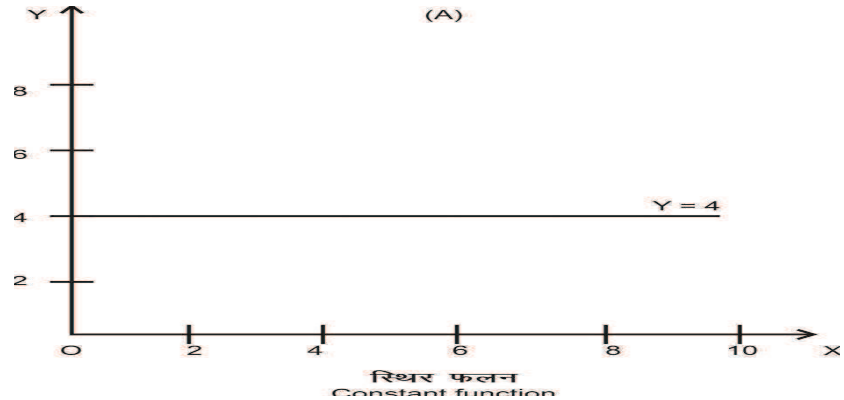
जहाँ a & b स्थिरांक है। घात फलन का अवकलन b गुणा a है गुणा X पर घात (b-1)

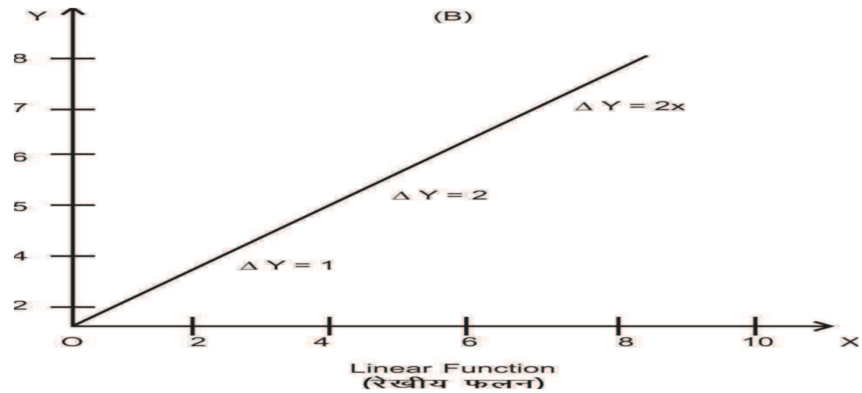
$$dy / dy = b.a.X^{b-1}$$

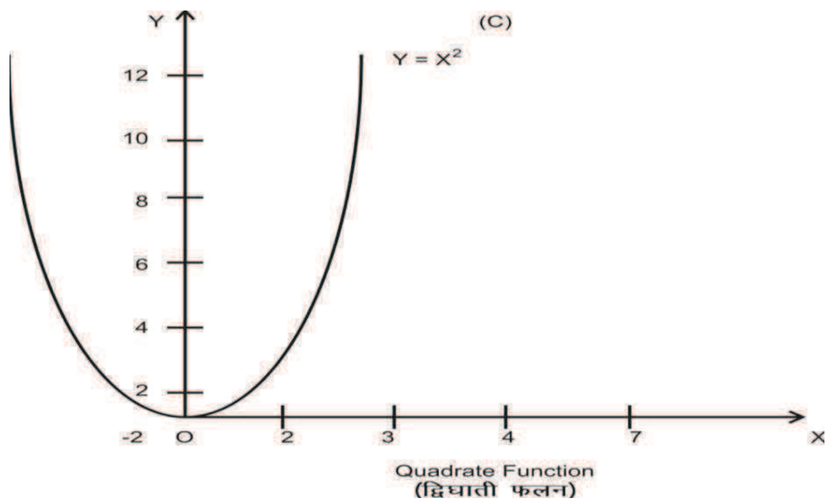
उदाहरण Y = 2X को ग्राफ B में प्रस्तुत किया ग्या है। फलन की ढाल = 2 और यह X के सभी मान के लिय स्थिर है। Power फलन को लागू करने पर जहाँ a = 2 & b = 1

$$= dy / dy = 1.2.X^{1-1} = 2X^0$$

$$= 2$$







यह ध्यान देने योग्य है कि किसी चर पर शून्य हमेशा 0 के बराबर होती है।

अब मान लीजिए $Y = X^2$ (चित्र C)

Power फलन नियम को लागू करने पर ($a = 1$, $b= 2$)

$dy / dX = 2.\ 1.X^{2-1} = 2\ X$

यह देखा जा सकता है कि अवकलन ऋणात्मक होता है जब $X<O$, O जब $X = O$ और घनात्मक जब $X > O$

<u>फलनों का योगफल का अवकलन</u>

मान लीजिए $Y = f(X)$ दो यह उससे अधिक भिन्न फलनों के जोड़ को व्यक्त करती है।

$$f_1(X), f_2(X)$$

$$Y = f_1(X) + f_2(X)$$

Y का अवकलन X के सापेक्ष में ज्ञात करने के लिये हर फलन को अवकलन करने के पश्चात परिणाम को जोड़ देना है।

$$dy / dX = (df_1(X) / dX) + (df_2(X)/dX)$$

इस परिणाम को कई भिन्न फलनों के जोड़ के अवकलन को ज्ञात करने के प्रयुक्त किया जा सकता है।

<u>दो फलनों का गुणन का अवकलन</u>

मान लीजिये कि चर Y दो अलग अलग फलनों $f_1(X)$ और $f_2(X)$ का गुणन है।

दो फलनों के गुणनफल का अवकलन, प्रथम फलन X द्वितीय फलन का अवकलन **+** द्वितीय फलन X प्रथम फलन का अवकलन के बराबर होता है।

$$dy / dX = f_1(X), df_2(X) / dX + f_2(X), df_1(X) / dX$$

उदाहरण अवकलन कीजिये

$$Y = X^2 (2X - 3)$$

$$dy / dX = X^2. D / dX [(2X - 3)] + (2X - 3). D / dX (X^2)$$

$$= X^2 (2 - 0) + (2X - 3). (2X)$$

$$= 2X^2 + 4X^2 - 6X$$

$$= 6X^2 - 6X$$

$$= 6X (X - 1)$$

<u>फलन के भागफल का अवकलन</u> –

दो फलनों के भाग्फल का अवकलन निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है –

$Y = f_1 (X) / f_2 (X)$

$dy / dX = [\{f_2 (X). (df_1 (X) / dX)] – [f_1 (X). (df_2 (X) / dX) \}] / [f_2 (X)]^2$

उदाहरण

$Y = 10X^2 / 5X-1$

$dy / dX =[(5X – 1). 20X] – [10X^2. 5 / (5X-1)^2] /(5X-1)^2$

$=(100X^2 – 20X – 50X^2) /(5X-1)^2$

$= 50X^2 – 20X / (5X – 1)^2$

$= 10 X (5X – 2) / (5X-1)^2$

<u>फलन के फलन का अवकलन (श्रृंखला नियम)</u>

मान लीजिये Y, Z चर का फलन है, $Y = f_1 (Z)$ और Z, X चर का फलन है ,$Z = f_2 (X)$ तब Y का अवकलन X के सापेक्ष में निर्धारित करने के लिये सर्वप्रथम dy / dz और dz / dX ज्ञात करें और फिर दोनों को गुणन करें।

$dy / dX = (dy / dX) . (dz / dX)$

$= (df_1 (Z) / dz) . (df_2 (X) / dX)$

उदाहरण Y का अवकलन X के सापेक्ष में ज्ञात करें

जब $Y = 10z – 2z^2 – 3$

जहाँ Z का सम्बन्ध X से इस प्रकार से है

$Z = 2X^2-1$

हल – $dy / dz = 10 – 4z$

$dy / dX = 4X$

तब $dy /dX = (10-4z) . 4X$

X को Z के स्थान के प्रतिस्थापित करने पर

$dy / dX= [10 – 4 (2X^2 – 1)] .4X$

$= (10 – 8X^2 + 4) . 4X$

$$= 40X - 32X^3 + 16X$$
$$= 56X - 32X^3$$
$$= 8X (7 - 4X^2)$$

11.6 अनुकूलतम समस्याओं में अवकलन का प्रयोग

प्रबन्धकीय अर्थशास्त्र में अधिकतम अब न्यूनतम समस्याओं के प्रयोग अनुकूलतम हलों को ज्ञात करने के लिये अवकलनों का प्रायः प्रयोग किया जाता है।

11.6.1 अधिकतम करण समस्या

सीमान्त विश्लेषण के अन्तर्गत किसी वक्र के अधिकतम बिन्दु को ज्ञात करने के लिये (उदाहरण के लिये अधिकतम लाभ) एक आवश्यक शर्त (किन्तु पूंजीर्याप्त नहीं) शर्त यह है कि इस बिन्दु पर वक्र की ढाल शून्य के बराबर हो इसी शर्त को अवकलन के माध्यम से भी व्यक्त किया जा सकता है। क्योंकि एक फलन का अवकलन किसी बिन्दु की ढाल या उसकी सीमान्त मान को मापता है, फलन $Y = f(X)$ की अधिकतम मान को ज्ञात करने की आवश्यक शर्त यह है कि इस बिन्दु पर dy/dX अवकलन शून्य के बराबर होता है। इसे किसी और बीजगणित फलन के अधिकतम अथवा न्यूनतम बिन्दु को प्राप्त करने की प्रथम क्रम शर्त कहा जाता है।

11.6.2 प्रथम क्रम शर्त : लाभ अधिकतमकरण

लाभ फलन को प्रयोग करते हुये

$$\pi= - 40 + 140Q -+ 10Q^2$$

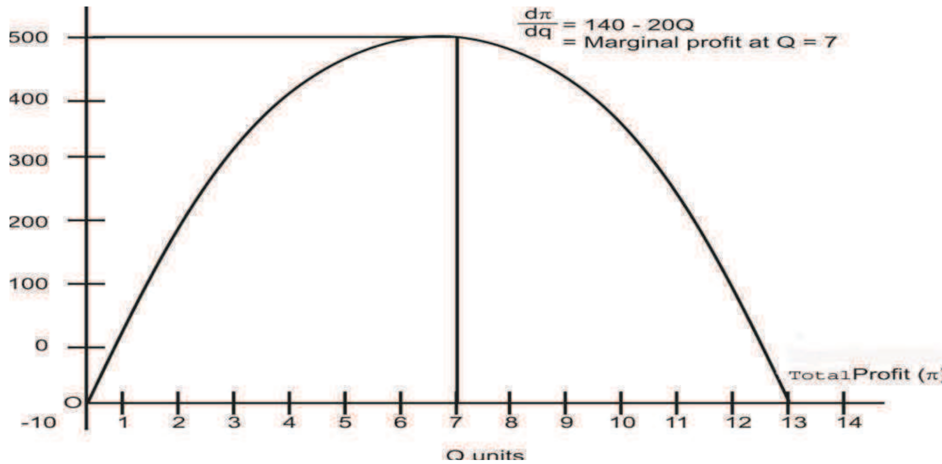
फलन का प्रथम अवकलन शून्य रख कर निकालने पर

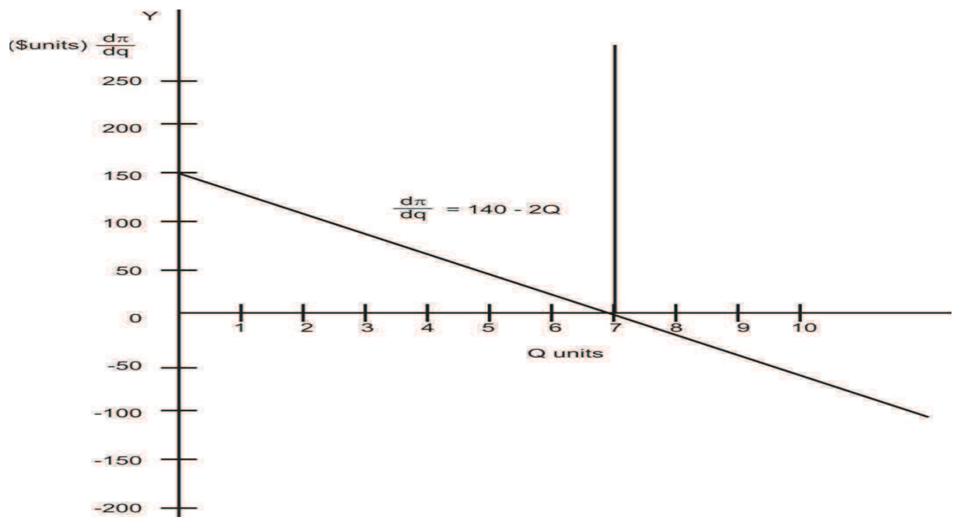
$$d\pi/dQ = 140 - 20Q$$

$$O = 140 = 20Q$$

इस समी० को के लिये हल करने पर इकाई प्राप्त होता है जो लाभ अधिकतम उत्पादन स्तर है।

यह लाभ और प्रथम अवकलन फलन अनुकूलतम हल है चित्र 4 में हम देख सकते है कि लाभ अधिकतम उस बिन्दु पर होता है जहाँ फलन न बढ़ रहा है न घट रहा है। दूसरे शब्दों में, जहाँ ढाल (या प्रथम अवकलन) शून्य के बराबर होती है।





11.6.3 द्वितीय अवकलन एवं द्वितीय क्रम शर्त फलन के अवकलन को शून्य के बराबर कर देने से और प्राप्त समी० को निर्णायक चर के मान का हल निकालने से यह साक्ष्य नहीं हो जाता कि वह बिन्दु ही प्राप्त होगा जिस पर फलन एक अधिकतम माने लेता है। एक U आकृति फलन की ढाल निम्नतम बिन्दु पर भी शून्य के बराबर होती है और फलन अपना न्यूनतम मान इस दिये पर बिन्दु पर प्राप्त करता है। दूसरे शब्दों में, अवकलन को शून्य पर तय करना फलन अधिकतम मान निकालने के लिये एक आवश्यक शर्त तो अवश्य है पर पूंजी पर्याप्त नहीं। दूसरी शर्त, जिसे द्वितीय क्रम शर्त कि प्रथम क्रम शर्त से प्राप्त किया गया बिन्दु, बीजगणितीय फलन का अधिकतम बिन्दु है अथवा न्यूनतम बिन्दु।

इस स्थिति को नीचे दिये चित्र के माध्यम से समझाया गया है। चित्र 5 में दोनों बिन्दु A तथा B पर फलन का ढाल (प्रथम अवकलन dy/dX) शून्य के बराकर है। हालांकि सिर्फ बिन्दु B पर ही फलन अपना अधिकतम मान प्राप्त करती है। हम यह देख सकते है कि फलन $Y = f(X)$ के अधिकतम मान B के पड़ोस में सीमान्त मान (अथवा ढाल) निरन्तर घटता जा रहा है।

पहले dy / dX के बिन्दु तक तो ढाल घनात्मक है और पश्चात ढाल ऋणात्मक हो जाती है अतः हमें यह आवश्यक रूपजी से निर्धारित कर लेना चाहिये कि ढाल की सीमान्त मान (ढाल की ढाल) घटती रही है। यह देखने के लिये कि सीमान्त मान घट रही है एक परीक्षण किया जा सकता है। सीमान्त मान का अवकलन निकालना और फिर यह जांच करना कि फलन के दिये गये बिन्दु पर यह ऋणात्मक है अथवा नहीं। असरदार रूपी से, हमें अवकलन का अवकलन निकालने को आवश्यकता होगी अर्थात फलन का द्वितीय अवकलन और फिर परीक्षण कैसा कि शून्य से कम है अथवा नहीं।

फलन $Y = f(X)$ का द्वितीय अवकलन इस प्रकार लिखा जाता है। d^2y / dX^2 एक अधिकतम बिन्दु तब प्राप्त होता है जब द्वितीय अवकलन ऋणात्मक होता है $d^2y / dX^2 < O$

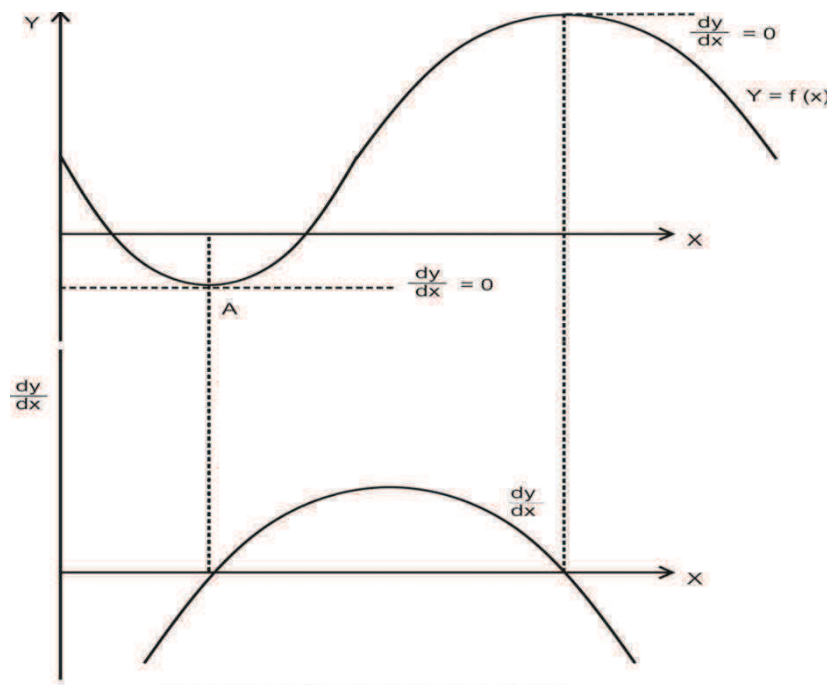
उदाहरण – ऊपर दिये ग्ये लाभ अधिकतम करण उदाहरण को ही लेते हुये प्रथम अवकलन से ही द्वितीय अवकलन प्राप्त किया जाता है।

$$d\pi/dQ = 140 - 20Q$$

$$d^2\pi/dQ^2 = 0 + 1. (-20) - Q^{1-1}$$

$$= -20$$

क्योंकि $d^2\pi/dQ^2 = < 0$, हम जानते है कि लाभ अधिकतम बिन्दु प्राप्त हो गया फलन के न्यूनतम मान को ज्ञात करने के लिये विपरीत शर्त को लिया जाता है चित्र में $Y = f(X)$ फलन के लिये बिन्दु A (न्यूनतम मान) के पड़ोस में सीमान्त मान (ढाल) निरन्तर बढ़ रहा है। प्रथम तो ढाल उस बिन्दु तक ऋणात्मक है जहाँ $dy / dX = 0$ और उसके पश्चात ढाल धनात्मक हो जाती है। अतः हम यह परीक्षण करके देखते है कि यदि d^2y / dX^2y किसी बिन्दु पर है तो यह न्यूनतम बिन्दु है।



फलन का अधिकतम एवं न्यूनतम मान

11.7 न्यूनतमीकरण समस्या

निर्णय लेने की स्थितियों में, लवण न्यूनतमीकरण भी एक उद्देश्य होता है। लाभ अधिकतमकरण समस्याओं की भांति अवकलन को इस संदर्भ के अनुकूलतम बिन्दु को ज्ञात करने के लिये भी प्रयुक्त किया जा सकता है।

उदाहरण – $C = 15 – 040\ Q + .\ 000080Q^2$

जहाँ C = लागत एवं Q = उत्पादन स्तर

C को Q के सापेक्ष में अवकलन करने पर

$dc / dQ = -.040 + .000160Q$

इस अवकलन को O के लाकर रखने पर और Q हल करने पर

$O = -.040 + .000160Q$

$Q^* = 250$

द्वितीय अवकलन निकालने पर

क्योंकि द्वितीय अवकलन धनात्मक है, Q का उत्पादन स्तर = 250 वह मात्रा है जब औसत कुल लागत न्यूनतम होगी।

सारांश रूप में, हम देखते है कि किसी फलन का अधिकतम एवं न्यूनतम मान ज्ञात करने के लिये उपर्युक्त दो शर्तों की आवश्यकता होती है। प्रथम क्रम शर्त उस बिन्दु को निर्धारित करती है जहाँ अवकलन $dy / dX = 0$। एक से अधिक बिन्दु होने पर द्वितीय क्रम शर्त को प्रयुकत किया जाता है जिससे फलने के दिये ग्ये बिन्दुओ का अधिकतम या न्यूनतम मान निर्धारित किया जा सकें। द्वितीय d^2y/dX^2 अवकलन यह इंग्ति करता है कि दिया ग्या बिन्द्दु फलन का अधिकतम माना है।($d^2y / dX^2 < O$) अथवा न्यूनतम मान ($d^2y / dX^2 > O$)

11.7.1 आंशिक अवकलन और बहुचर अनुकूलतम

अब तक का विश्लेषण चर Y को एक निर्णय चर X के फलन के रूपजी में व्यक्त किये जाने तक सीमित था। हालांकि आमतौर पर आर्थिक सम्बन्धों दो या उससे अधिक निर्णय चरों पर निर्भर करते है। उदाहरण के लिये एक उत्पादन फलन किसी फर्म, उद्योग आदि के निर्ग्त को उसे निर्मित करने वाले आग्रे जैसे पूंजी, श्रम, कच्चा माल आदि से सम्बन्धित होता है। अन्य उदाहरण है मांग फलन जो किसी उतपाद या सेवा की बिक्री या विक्रय अन्य चरों जैसे कीमत, विज्ञापन सीानापन्न वस्तुओं की कीमतें, आय आदि से सम्बन्धित होते हैं।

11.7.2 आंशिक अवकलन

मान लीजिये, अंक आश्रित चर दो स्वतन्त्र निर्णय चरों (X_1 & X_2) का फलन है।

$$Y = f(X_1, X_2)$$

X_1 या X_2 में परिवर्तन के कारण में होने वाने परिवर्तन की समीक्षा की जाय। X_1 के दिये गये परिवर्तन से ($\Delta y/\Delta X$) पर होने वाले सीमान्त प्रभाव को दूर करने के लिये, X_2 को स्थिर मान लिया जाता है। इसी प्रकार से X_2 में परिवर्तन से Y पर X_2 के कारण सीमान्त प्रभाव को दूर करने के लिये ($\Delta y/\Delta X_2$) चर को स्थिर मान लिया जाता है।

यदि अन्य चरों को स्थिरांक या अचर मानकर किसी एक चर में परिवर्तन के सीमान्त प्रभाव का मान y में परिवर्तन लायें, तो यह फलन का आंशिक अवकलन कहा जायेगा।

उदाहरण के लिये यदि $Z = f(s, y)$ है

तो (i) यदि को अचर या स्थिरांक मानकर Z का अवकलन X के सापेक्ष किया जा तो अवकलन को dz / dz लिखा पाता है तथा इसे "X के सापेक्ष का आंशिक अवकलन" कहा जाता है। को "डेल्टा Z वाई डेल्टा X पढ़ा पाता है।"

यदि X को अचर या स्थिरांक मानकर z का अवकलन y के सापेक्ष किया जाय, तो अवकलन को dz / dy लिखा जाता है।

उदाहरण – आंशिक अवकलन निकालने के लिये हम लाभ चर π को दो उत्पादों (तेल और गैस) Q_1 और Q_2 का फलन लेते है।

$$\pi = -60 + 140\, Q_1 + 10\, Q_2 - 10\, Q_2 - 10\, Q_1^{\,2} - Q_2^{\,2} - 6\, Q_1 Q_2$$

Q_2 को स्थिर मानकर का आंशिक अवकलन Q_1 के सापेक्ष में

$$d\pi/dQ = 0 + 140 + 0 + 2.\ (-10).\ Q_1 - 0 - 6Q_2$$

$$= 140 - 20\, Q_1 - 6Q_2$$

इसी प्रकार से Q_1 को स्थिर लेते हुये, π का आशिक अवकलन Q_2 के सापेक्ष में

$$d\pi/dQ_2 = 0 + 0 + 100 - 0 + 2.\ (-8).\ Q_2 - 6Q_1$$

$$= 100 - 16\, Q_2 - 6Q_1$$

उदाहरण $Q = 3.0\, P^{-.50} A^{.25}$

जहाँ Q = बेची गयी उतपादन की मात्रा विक्रय कीमते A = विज्ञापन पर व्यय

Q का आंशिक सन्तुलन P के सापेक्ष में

$$dQ / dp = 3.0A^{.25} (-.50P^{-50-1})$$

$$= -1.5\, P^{-1.50} A^{.25}$$

इसी प्रकार से Q का आंशिक अवकलन A के सापेक्ष में

$$dQ / dA = 3.0P^{-.50} (.25A^{.25-1})$$

$$= .75\, P^{-.50} A^{-.75}$$

आंशिक अवकलन को दो या उससे अधिक X चर वाले अधिकतमकरण एवं न्यूनतमीकरण समस्या के अनुकूलतम हल को प्राप्त करने में प्रयुक्त किया जा सकता है।

11.8 सारांश

निश्चितता के अन्तर्गत निर्णय बनाने के क्षेत्र में समस्याओं के दो विस्तृत क्षेत्र है – अबाध अनुकूलतम समस्या एवं बाधित अनुकूलतम समस्या सीमान्त विश्लेषण किसी भी आर्थिक क्रिया के विस्तार एवं संकुचन की निर्णय संरचना में महत्व रखती है। अवकलन का सीमान्त विश्लेषण से एक निकट सम्बन्ध है जिसे किसी भी बीजगणितीय सम्बन्ध को व्यक्त करने में प्रयुक्त किया जाता है। (निर्णायक चर एवं उद्देश्य चर के मध्य) प्रथम अवकलन दिये ग्ये बिन्दु पर किसी फलन के परिवर्तन की दर अथवा ढाल को मापता है। और यह सीमान्त फलन की सीमित मान के बराबर होता है।

विशिष्ट प्रकार के फलों के अवकलन को ज्ञात करने के लिये विभिन्न नियम दिये ग्ये है।

किसी फलन के अधिकतम अथवा न्यूनतम बिन्दु को ज्ञात करने के लिये एक आवश्यक किन्तु अपर्याप्त शर्त यह है कि प्रथम अवकलन शून्य के बराबर है। इसे प्रथम क्रय शर्त कहते हैं।

द्वितीय क्रम शर्त की आवश्यकता यह निर्धारित करने की होती है कि दिया ग्या बिन्दु अधिकतम है अथवा न्यूनतम द्वितीय अवकलन यह इंग्ति करता है कि दिया ग्या बिन्दु अधिकतम है यदि द्वितीय अवकलन शून्य से कम है और न्यूनतम है यदि द्वितीय अवकलन शून्य से अधिक है।

किसी बहुचर फलन का आंशिक अवकलन अन्य चरों को स्थिर रखते हुये फलन के मान पर किसी एक चर में परिवर्तन करने पर होने वाले सीमान्त प्रभाव को मापता है। बाधित अनुकूलतम समस्या में लेगरेन्जज गुणांक तकनीक को फलन की अनुकूलतम मान को ज्ञात करने के लिये प्रयुक्त किया जाता है। अन्य चरों को संलग्न करने पर लेगरेन्जज गुणक तकनीक एक बाधिक समस्या से अबाध समस्या में बदल जाता है। जिसे अवकलन विधि द्वारा हल किया जा सकता है।

11.9 शब्दावली

फलन का अवकलन – यदि $\Delta X \to 0$ तो भिन्न $\Delta y / \Delta X$ की सीमा को $f(X)$ का X के सापेक्ष अवकलन का अवकल गुणांक कहते हैं

अवकलन – किसी फलन f (X) का अवकलन ज्ञात करने की गणितीय क्रिया को अवकलन कहा जाता है।

अनुकूलतम तकनीक – ऐसे उपकरण जिनसे किसी उद्यमी के सांधनों को कुशलपूर्वक प्रबन्धन किया जा सके जिससे लाभ अधिकतम किया जा सके।

निबाध अनुकूलतम समस्या – ऐसी अनुकूलतम समस्या जिसे उद्देश्य एवं निबाध फलनों द्वारा व्यक्त किया जा सकता है। जहाँ निर्णायक चारों पर प्रतिबन्ध होना है।

अबाध अनुकूलतम समस्या – ऐसी अनुकूलतम समस्या जहाँ निर्णय चरो पर कोई प्रतिबन्ध लागू नहीं होता है और अवकलन के माध्यम से इसे हल किया जा सकता है।

लेगरेन्जेज गुणांक – इस तकनीक का प्रयोग ऐसी समस्याओं के हलों को ज्ञात करने के लिये प्रयुकत किया जाता है। जहाँ समस्याओं के प्रतिबन्धों का समिका सम्बन्ध द्वारा व्यक्त किया जा सके।

11.10 अभ्यास प्रश्नों के उत्तर

1. कौन से दो प्रकार के उद्देश्य फलन होते हैं।
2. कीमत उत्पाद निर्णय सम्बन्धी समस्या में उद्देश्य क्या होता है।
3. उत्पादन समस्या में उद्देश्य क्या होता है।
4. अनुकूलतम समस्याओं के किस प्रकार हल किया जा सकता है।
5. अबाधित अनुकूलतम समस्याओं को हल करने के लिये कौन सी तकनीक प्रयुकत की जाती है।
6. आर्थिक निर्णय सम्बन्धी समस्याओं में प्रतिबन्धों को किस प्रकार के सम्बन्धों द्वारा व्यक्त किया जाता है।
7. किस प्रकार की समस्याओं के अन्तर्गत दोनों उद्देश्य और प्रतिबन्ध सम्बन्धों को रेखीय फलनों द्वारा व्यक्त किया जाता है।
8. सीमान्त विश्लेषण एवं अवकलन के मध्य क्या सम्बन्ध है ?

उत्तर – (1) लाभ अधिकतम एवं लागत न्यूनतम (2) लाभ अधिकतम करना

(3) लागत न्यूनतम करना(4) अवकलन, रेखीय प्रायोजन

(5) अवकलन (6) असमिका(7) रेखीय प्रायोजन

11.11 संदर्भ सहित ग्रन्थ

1. Webchapter:OptimizationTechniques;www.shsu.edu/~eco_dgf/web_chapter_a.pdf.
2. Bose, D., (2003), An Introduction to Mathematical Economics, Himalaya Publishing House.

11.12 उपयोगी/सहायक ग्रन्थ

- Kumar, Anil,(2008) Statistical Research Methodology, Aifa Publishing House.
- Singh,S.P. ((2010) Principles of Statistics , S&Chand Publishing House .
- Bhardwaj, R.S. (2000). Mathematics for Economics and Business, EXcel Books.

11.13 निबन्धात्मक प्रश्न

1. अनुकूलतम समीकरणों द्वारा आर्थिक समस्याओं का निवर्चन किस प्रकार होता।
2. अवकलन के नियम कौन–कौन से है।
3. अनुकूलतम तकनीक के विभिन्न प्रकार क्या है।
4. अवकलन प्राप्त करने की क्या विधि है।

इकाई 12 द्विघात समीकरण

12.1 प्रस्तावना

पिछली इकाइयों में आगत–निर्गत विश्लेषण, रैखिक प्रोग्रामिंग, एवं अनुकूलतम समीकरणों का निर्वचन एवं उसके प्रयोग का अवलोकन किया। प्रस्तुत इकाई में द्विघात समीकरणों के माध्यम से आर्थिक विश्लेषण में प्रयुक्त विभिन्न चरों के मध्य व्याप्त परस्पर सम्बन्धों का अध्ययन किया गया है।

द्विघातीय फलनों में अज्ञात राशि की अधिकतम घात दो होती है। द्विघातीय समीकरणों की सहायता से उत्पादन लागत के लिये एक अनुकूलतम मॉडल को प्राप्त किया जा सकता है। एक द्विघातीय फलन, रेखीय फलन के समान ही श्रेष्ठ रास्ता है और निश्चित रूप से उससे बेहतर भी माना गया है।

12.2 उद्देश्य

प्रस्तुत इकाई के अध्ययन के बाद हम यह जान सकेंगे कि–

1– द्विघात समीकरण कैसे हल किया जाता है।
2– द्विघात समीकरण को हल करने की कितनी विधियां है।
3– द्विघात लागत वक्र किस प्रकार निर्मित किया जाता है।
4– द्विघात समीकरण अथवा फलन को रेखाचित्र में किस प्रकार दर्शाया जा सकता है।
5– आर्थिक विश्लेषण में द्विघातीय समीकरणेां का क्या महत्व है ?

12.3 द्विघात समीकरण की परिभाषा

किसी चर राशि में दिया हुआ गणितीय व्यंजक उस राशि का फलन कहलाता है। उदाहरण के लिये X^2+5X+7, X^3+9X^2-7X+3, $\sin X$, e^X, $\log X$ आदि चर राशि X के फलन है। फलन को प्रतीकात्मक रूप में $\phi(X)$, $f(X)$ आदि से लिखते हैं।

समीकरण का उच्चतम घात समीकरण का घात कहलाता है।

इस प्रकार :

- प्रथम घात के समीकरण को एकघात (linear)समीकरण कहते है।
- द्वितीय घात को समीकरण के द्विघात (quadratic) समीकरण कहते है।
- तृतीय घात को समीकरण के त्रिघात (cubic) समीकरण कहते हैं।
- चतुर्थ घात को समीकरण के चतुर्घात (biquadratic) समीकरण कहते है।

गणितीय दृष्टिकोण से फलनों को मुख्यतः रैखिक फलन, द्विघातीय फलन, त्रिघातीय एवं चरघातांकी फलन के रूप में प्रदर्शित किया जाता है। इन समस्त फलनों से प्राप्त रेखाचित्रों अथवा वक्रों का स्वरूव भिन्न–भिन्न होता है। अन्य शब्दों में , वक्रों का स्वरूप देखकर यह ज्ञात किया जा सकता है कि 9.4.3 मुख्य भाग फलन रैखिक, द्विघातीय , त्रिघातीय अथवा चरघातांकी है।

जिस समीकरण में चर राशि का महत्तम मान 2 हो, उसे द्विघात समीकरण कहते हैं। उदाहरण के लिये $ax^2+bx+c=0$ के अनुरूप समीकरण, द्विघात समीकरण है।
द्विघातीय फलनों में अज्ञात राशि की अधिकतम घात दो होती है। सामान्य रूप में एक द्विघातीय फलन को निम्नवत व्यक्त किया जाता है :–

$$y=ax^2+bx+c$$

जहां a,b तथा c ज्ञात अचर राशियां है, यहां अज्ञात चर का घात 2 है। द्विघाती फलन को वर्गत्मक फलन भी कहा जाता है।

$x^2-y^2=16$, x तथा y द्विघाती है।

सामान्य वर्गत्मक फलन $y=ax^2+bx+c$ में a,b तथा c के भिन्न मूल्यों के लिये भिन्न भिन्न वर्गत्मक फलन प्राप्त होते हैं और तद्नुरूप इनका रेखाचित्र स्वरूप भी भिन्न–भिन्न होता है।

1. $3X^2 + 2X-1 = 0$ एक द्विघाती समीकरण हैं यहाँ $a = 3, b = 2, c = -1$
2. $2X^3 + 5 = 0$ द्विघाती समीकरण नहीं है।
3. द्विघातों समीकरण $aX^2 + bX + c = 0$ को अधूरा कहा जायेगा यदि कम से कम अचर राशि b या c शून्य के बराबर है।

दो रेखीय बहुपदीय व्यंजकों के गुणनफल से भी द्विघात समीकरण प्राप्त होता है।
मान ले कि $(lx+m)$ एवं $(px+q)$ दो रेखीय बहुपदीय व्यंजक है, यहां l/o , p/o तब इन दोनों बहुपदों का गुणनफल एक बहुपदीय द्विघात समीकरण $lpx^2+(lq+mp)x+mq$ देगा। इसका मानक रूप ax^2+bx+c है। यहां $a=lp,\ b=(lq+mp)$ एवं $c=mq$ है।

12.4 द्विघाती समीकरण का मूल

$$\mathbf{aX^2 + bX + c = 0}$$

परिभाषा – X के वे मान जो समीकरण $aX^2 + bX + c = 0$ को संतुष्ट करते है, द्विघाती समीकरण $aX^2+bX+c =0$ के मूल है। समीकरण के मूल को द्विघाती समीकरण के शून्य भी कहे जाते है।

यह दर्शाने के लिये कि हर द्विघाती समीकरण के दो और मात्र दो मूल होते है

मान लें = $aX^2 + bX + c = 0$

जहाँ = $a \neq 0$

Now $aX^2 + bX + c = 0$ or $a^2X^2 + abX + ac = a.0 = 0$ (a से गुणा करने पर)

or $(aX)^2 + 2.aX - b/2 + (b / 2)^2 – b^2/4 + ac = 0$

or $(aX + b/2)^2 = b^2/4 – ac = b^2 – 4ac/4$

or $aX + b/2 = + \sqrt{}b^2 – 4ac/2$ or $aX = - b/2 + \sqrt{}b^2 – 4ac/2$

$X = -b + \sqrt{}b^2 – 4ac / 2a$

अतः हम देख सकते है कि द्विघाती समीकरण के दो मूल है α और βहर द्विघाती समीकरण के सिर्फ दो मूल होते है अर्थात दो से अधिक मूल नहीं हो सकते

यदि हम यह मान ले कि एक द्विघाती समीकरण aX^2+bX+c के तीन मूल α, β & γ है।

क्योंकि α, β & γ समीकरण $aX^2+bX+c=0$ के मूल है

$a\alpha^2+b\alpha+c=0$ (i)

$a\beta^2+b\beta+c=0$ (ii)

$a\gamma^2+b\gamma+c=0$ (iii)

(II) को (i) से घटाने पर

$(\alpha^2-\beta^2)+b\ (\alpha-\beta)=0$ or $(\alpha-\beta)\ [a\ (\alpha+\beta)+b]=0$

लेकिन $\alpha \neq \beta$ $a\ (\alpha+\beta)+b=0$ --------- (v)

(III) को (II) से घटाने पर

$a\ (\beta^2-\gamma^2)+b\ (\beta-\gamma)=0,$ or $(\beta-\gamma)\ [a\ (\beta+\gamma)+b]=0$

किन्तु $\beta \neq \gamma$ $a\ (\beta+\gamma)+b]=0$

(v) को (iv) से घटाने पर

$a\ (\alpha-\gamma)=0$ or $\alpha-\gamma=0\ [a \neq 0]$

$\alpha=\gamma$ जो हमारी मान्यता का खण्डन करता है कि अलग– अलग हैं अतः हर द्विघाती समीकरण के सिर्फ दो मूल है।

12.4.1 मूल के योग और गुणनफलन

यदि α और β समीकरण aX^2+bX+c के मूल है तो

$$\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \beta = \frac{-b-\sqrt{-b^2-4ac}}{2a}$$

<u>मूल का योग</u>

$$\alpha+\beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{-b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

<u>मूल का गुणनफल</u>

$$\alpha.\beta = \frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{4a^2}$$

$$= \frac{(-b)^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{c}{a}$$

अतः मूल का योग = (X की अचर राशि) / (X^2 की अचर राशि)

मूल का गुणनफल = (स्थिरांक) / (X^2 की अचर राशि)

टिप्पणी: द्विघाती समीकरण का विवेचक या विविक्त कर $b^2 - 4aX$ द्विघाती समीकरण $aX^2 + bX + c = 0$ का कहलाता है इसे D से व्यक्त किया जाता है। राशि $b^2 - 4ac$ को समीकरण का विविक्त कर (D) कहते है। अतः समीकरण के मूल क्रमशः वास्तविक, बराबर और अधिकल्पित होगें और उसका विविक्त कर >,<,= 0 है।

12.4.2 द्विघाती समीकरण के मूल की प्रकृति :

मान लो द्विघात समीकरण $aX^2 + bX + c = 0$ के मूल α और β है।

जहाँ a, b, c वास्तविक संख्या है।

Case I जब $D < 0$ ie $b^2 - 4ac < O$

तो $\sqrt{b^2-4ac}$ काल्पनिक होग

अतः α एवं β दोनों काल्पनिक होगें

Case II जब $D = 0$ i.e $b^2 - 4ac = 0$

तो $\sqrt{b^2-4ac}$= 9 from (1) $\alpha = -b / 2a$ एवं $\beta = -b / 2a$

अतः एवं दोनो वास्तविक एवं बराबर होगें।

Case III यदि $D > 0$ i.e $b^2 - 4ac > 0$

$\sqrt{b^2-4ac}$ वास्तविक होगा।

मूल α एवं β दोनों वास्तविक एवं भिनन – भिन्न होगें।

Case IV जब D i.e $b^2 - 4ac$ एक पूर्ण वर्ग है और a, b, c परिमेय है।

$\sqrt{b^2-4ac}$= परिमेय संख्या

मान ले $\sqrt{b^2-4ac} = k$, तब मूल α एवं β दोनों परिमेय होगें।

- यदि b^2-4ac धनात्मक है अर्थात् $b^2 \succ 4ac$ तो $\sqrt{b^2-4ac}$ वास्तविक है। अतः दोनों ही मूल वास्तविक एवं असमान होगे।
- यदि b^2-4ac अर्थात् $b^2 = 4ac$ तो और वास्तविक एवं बराबर होगें और प्रत्येक का मान होगा
- यदि b^2-4ac ऋणात्मक अर्थात् $b^2 \prec 4ac$ तो $\sqrt{b^2-4ac}$ अधिकल्पिक है।

- अतः α और β दोनों अधिकल्पित एवं असमान होगें।
- यदि b^2-4ac पूर्ण वर्ग है और a, b, c परिमेय है तो दोनों मूल α और β परिमेय एवं असमान होगें।
- यदि b^2-4ac एक पूर्ण वर्ग नहीं है तो α और β अपरिमेय होगें, चाहे a, b, c परिमेय ही क्यों न हों

उदाहरण – समीकरण के मूलों के लक्षण ज्ञात करों।
हल– समीकण का विविक्त कर जो ऋणात्मक है, अतः मूल अधिकल्पित है।
उदाहरण – 2 सिद्ध करो कि समीकरण के मूल परिमेय होंगे, यदि और परिमेय हो।
हल– विविक्त कर = , जो एक पूर्ण वर्ग है, अतः मूल परिमेय होगे।

उदाहरण – एक कार 500 किमी. के सफर मे ंएक बस से 25 किमी./घंटा तेज गति से चलती है। बस कार से 10 घंटे अधिक समय लेती है। कार एवं बस की गति ज्ञात कीजिए।

हल – मान लीजिये बस की गति = X किमी./घंटा एवं कार की गति =(X + 25) किमी./घंटा

500 किमी. का सफर तय करने में बस समय लेती है = 500/X घंटा

500 किमी. का सफर तय करने में कार समय लेती है = 500/(X+25) घंटा

अतः 500/X = (500/(X+25))+10

$50 / X = (50 / (X + 25)) + 1$

$(50 / X) - (50 / (X + 25)) = 1$

$(50 (X + 25) – 50X) / (X(X+25)) = 1$

$1250 = X^2 + 25X$

$X^2 + 25X – 1250 = 0$

$X^2 + 50X - 25X – 1250 = 0$

$(X+ 50) (X-25) = 0$

$X \neq - 50, X = 25$ किमी./घंटा

अतः बस की गति = 25 किमी./घंटा एवं कार की 50 किमी./घंटा है।

12.5 द्विघात समीकरणों का गुणनखण्ड निकालना

द्विघात बहुपद ax^2+bx+c का गुणनखण्ड तभी निकाला जा सकता है जब r एवं s दो ऐसी संख्या विद्यमान हो, जिसके लिये

1– $r=lq,\ s=mp$

2– $r+s=b=x$ का गुणांक $=lq+mp$

3– $r\times s=ac=lpmq=x^2$ का गुणांक x अचर

साधित उदाहरण $2x^2+11x+5$ का गुणनखण्ड निकाले–

1– यहां $a=2, b=11$, $c=5$

2– दो संख्याओं $r \& s$ का पता लगाइये ताकि $r+s=b=11$ तथा $r\times s=a\times c=2\times 5=10$ जो कि 10 तुल्य 1 है।

3– अब मध्य पद $11x$ को दो भागें में तोड़िये।

$$11x=10x+1x$$
$$2x^2+11x+5=2x^2+10x+1x+5$$
$$2x(x+5)+1(x+5)=(2x+1)(x+5)$$

12.5.1 द्विघात समीकरण के गुणनखण्ड की शर्तें–

सभी द्विघात समीकरणों का गुणनखण्ड निकालना सम्भव नहीं होता है। किसी द्विघाात समीकरण का गुणनखण्ड निकालना सम्भव है या नहीं, यह निम्नलिखित ढंग से जाना जा सकता है–

1– यदि $b^2-4ac>o,$ तब प्रदत्त द्विघात समी0 का गुणनखण्ड निकाला जा सकता है।

2– यदि $b^2-4ac<o,$ तब इसका गुणनखण्ड निकालना सम्भव नहीं है।

12.5.2 द्विघात समीकरण का हल–

किसी भी द्विघात समीकरण को हल करने पर चर के हमेशा दो मान प्राप्त होते हैं। चर के इन मानों की समीकरण का मूल (roots) कहा जाता है। कोई भी द्विघात समीकरण या तो गुणखण्ड विधि या सूत्र विधि या द्रुत विधि (यदि मूल परिमय) हो से हल किया जा सकता है।

1– **गुणनखण्ड विधि**

2– **सूत्र विधि**–यदि किसी द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ को हल करना हो तो निम्नलिखित सूत्री का इस्तेमाल किया जाता है–

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

धन एवं ऋण चिन्हों को अलग करने पर x के दो मान प्राप्त होते हैं। b^2-4ac को विविस्तर कहा जाता है। द्विघात समीकरण को हल करने से प्राप्त चर के दोनों मानों को समीकरण का मूल (roots of the quation) कहते हैं। इन मूलों के α एवं β से निर्दिष्ट किया जाता है।

पाया गया कि द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के दोनों मूलों का योग $\frac{-b}{a}$ के बराबर होता है अर्थात $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$ एवं मूलों का गुणनफल $\frac{c}{a}$ के बराबर होता है।

अर्थात $\alpha+\beta=\frac{c}{a}$

किसी द्विघात समी0 $ax^2+bx+c=0$ के लिये

1– मूल बराबर होंगे यदि $b^2=4ac$

2– मूल वास्तविक एवं असमान होंगे यदि $b^2>4ac$

3– मूल अवास्तविक एवं असमान होंगे यदि $b^2<4ac$

3– द्रुत विधि– (यदि मूल परिमय हो) यदि द्विघात समी $ax^2+bx+c=0$ के रूप में हो तो निम्नलिखित विधि द्वारा मूल निकाला जा सकता है।
उदाहरण द्वारा विधि को समझा जा सकता है।

मान लिया गया कि समी0 $10x^2-x-21$ का मूल निकालना है।

I- $10x^2-x-21$

-21 X 10 = -210

II- 14 15 (–210 के ऐसे गुणखण्डों को ज्ञात करे जिसका योगफल x के गुणांक के बराबर हो यानि (–1)14X(–15)=–210 एवं 14+(–15)–1)

III- $\frac{14}{10} = \frac{7}{5}$ $\frac{-15}{10} = \frac{-3}{2}$ (द्वितीय चरण में प्राप्त गुणनखण्डों में x^2 के गुणांक से भाग दें।)

IV- $\frac{-7}{5}$ $\frac{3}{2}$ (प्राप्त चिन्हों के बदल दें)

इस प्रकार $\frac{-7}{5}$ एवं $\frac{3}{2}$ प्रदत्त समीकरण के मूल है।

12.6 प्रदत्त मूलों के आधार पर द्विघात समी0 का निर्माण

यदि द्विघात समी0 के मूल दिये ग्ये हो एवं उनके आधार पर द्विघात समी0 का निर्माण करना हो तो निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जाता है।

समी0 x^2-x (मूलों का योग + मूलों का गुणनफल = 0) उदाहरण के लिये यदि प्रदत्त मूल 2 एवं 3 हो तो अभीष्ट समी0 = $x^2-(3+2)x+3\times 2=0 \Rightarrow x^2-5x+6=0$

नोट–1 द्विघात समी0 $ax^2+bx+c=0$ के मूल एक दूसरे के व्युतक्रम होंगे यदि $a=c$ हो।

2– यदि किसी द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ का एक मूल शून्य हो तो $c=0$

3– यदि द्विघात समीरण $ax^2+bx+c=0$ का एक मूल दूसरे मूल का ऋणात्मक व्युत्क्रम हो तो $c=-a$

4– यदि दोंनों मूल शून्य के बराबर हो तो $b=0$ एवं $c=0$

5– यदि एक मूल अनन्त हो तो $a=0$ और यदि हो मूल अनन्त हो तो $a=0$ एवं $b=0$

6– यदि मूल परिमाण में समान हो पर चिन्ह में विपरीत हो तो $b=0$

7– यदि दो द्विघात समीकरणों $ax^2+bx+c=0$ एवं $a, x^2+b_1x+c_1=0$ का एक मूल उभयनिष्ठ हो तो $(bc_1-b_1c)\ (ab_1-a_1b)=(ca_1-c_1a)^2$

8– यदि इनके दोनों ही मूल समान हो तो $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$

12.7 द्विघात लागत वक्र का निर्माण

द्विघातीय फलनों (Quadratic functions) में अज्ञात राशि की अधिकतम घात दो होती है।

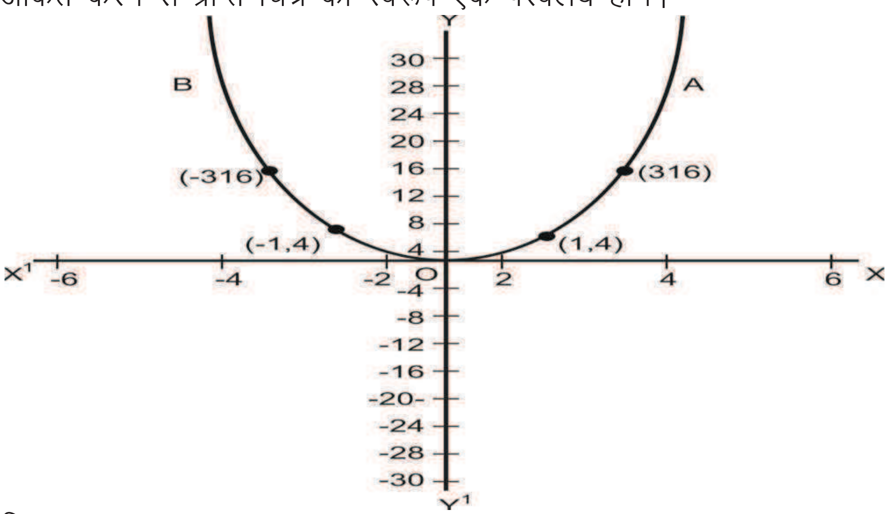
फलन $y=ax^2+bx+c$ में यदि $b=0$ तथा $c=0$ तब $y=ax^2$ प्राप्त होता है। फलन $y=ax^2$ का रेखाचित्र एक परवलय होता है। यदि $a=4$ मान लिया जाय तो फलन $f=4x^2$ का स्वरूप ग्रहण करेग। इस फलन का रेखाचित्र खींचने के लिये x के अलग अलग मूल्यों के लिये y के संगत मूल्य प्राप्त किये जाते हैं।

फलन $f=4x^2$ के लिये

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	36	16	4	0	4	16	36

निदेशांक (–3, 36) (–2, 16) (–1,4) (0, 0) (1 , 4) (2 , 16) (3,36)

इस तरह में युगमों के रूप में (–3, 36) (–2, 16) (–1,4) (0, 0) (1 , 4) (2 , 16) तथा (3,36) अलग–2 बिन्दुओं के निर्देशांक प्राप्त होते हैं। इन बिन्दुओं को ग्राफ पेपर पर अंकित करने से प्राप्त चित्र का स्वरूप एक परवलय होग।



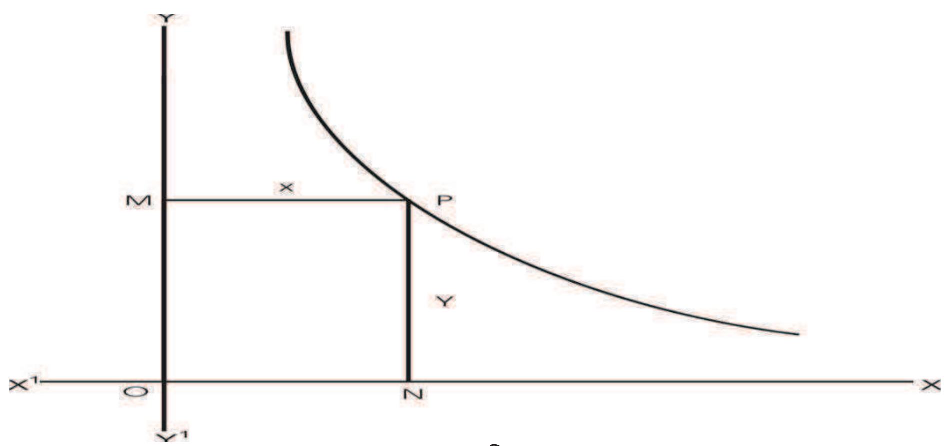
चित्र 1

चित्र में रेखा yy^1 परवलय AOB का अक्ष है। परवलय AOB अपने अक्ष OY में समनित है।

12.7.1 समकोणीधर या (आयतीत) अतिपरवलय का रेखाचित्र खींचना–

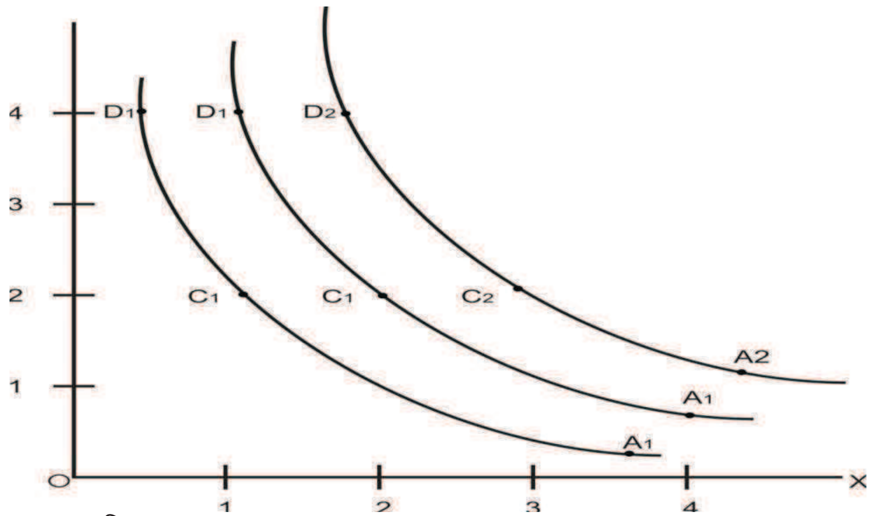
यदि फलन का स्वरूप $x, y = a$ है तब इसका रेखाचित्र खीचंने पर हमें समगेणीय अतिपरवलय प्राप्त होता है हम जानते हैं कि समकोणीय अथवा आयतीय अतिपरवलय का केन्द्र कहते हैं। यदि मूल बिन्द की अतिपरवलय का केन्द्र है तो OX, OY ही उपगमी रेखांश है और इससे दूरी का गुणा $x, y = a$ होगा जैसा चित्र 2 में प्रदर्शित किया ग्या है। इस तरह $x = \frac{a}{y}$ या $y = \frac{a}{x}$ होग। जैसे जैसे x बढ़ता है, y घटता है और विलोमशः न कभी x शून्य होता है और न कभी y ही वक्र उपगमी रेखाओं को कभी स्पर्श नहीं करता।

यदि फलन $xy - a$ में $a = 1$ हो तो फलन $xy = 1$ अथवा $y = \frac{1}{x}$ का रेखाचित्र खींचने के लिये x के विभिन्न मूल्यों के लिऐ y का संगत मूल्य प्राप्त करते हैं। फलन $x\, y = 1$ के लिये



चित्र 2

x	1	2	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	2	4
निर्देशांक	(1,1)	(2, $\frac{1}{2}$)	(4, $\frac{1}{4}$)	($\frac{1}{2}$,2)	($\frac{1}{4}$,4)



चित्र 3

इस तरह हमें x तथा y चरों के जोड़ों के रूप में (1,1) $(2, \frac{1}{2})$ $(4, \frac{1}{4})$ $(\frac{1}{2}, 2)$ तथा $(\frac{1}{4}, 4)$ अलग अलग बिन्दुओं के निर्देशांक प्राप्त होते हैं। इन बिन्दुओं को ग्राफ पेपर पर अंकित करने पर प्राप्त चित्र (3) का स्वरूप आयातीय अतिपरवलय (Rectangular Hyperbole) होगा।

इसी तरह $a = 2 \& a = 4$ मान लेने पर क्रमशः आयातीय अतिपरवलय वक्र $A_1B_1C_1D_1$ तथा $A_2B_2C_2D_2$ प्राप्त होते हैं।

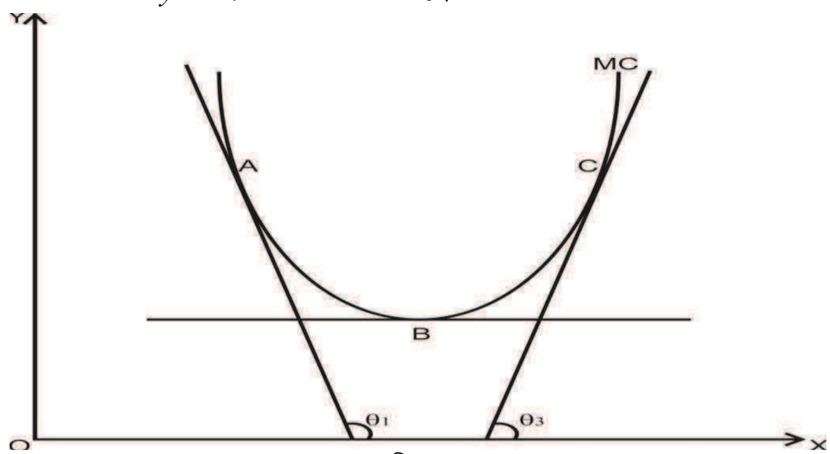
12.8 द्विघात समीकरण एवं फलन का अर्थशास्त्र में महत्व

अर्थशास्त्र के अध्ययन एवं विश्लेषण में परवलय तथा समकोणीय (अथवा आयतीय) अति परवलय वक्रों के वाल के अध्ययन उपयोगी एवं महत्वपूर्ण होता है, क्योंकि इससे इस तथ्य की जानकारी प्राप्त होती है कि एक आर्थिक चर में परिवर्तन होने पर दूसरे आर्थिक चार पर क्या प्रभाव पड़ता तथा उसके परिवर्तन की दशा क्या होगी ?

हम जानते हैं कि एक वक्र के किसी बिन्दु पर उसकी ढाल ज्ञात करने के लिये उस बिन्दु पर एक स्पर्श रेखा खींचते हैं और फिर देखते हैं कि यह स्पर्श रेखा x अक्ष से बनाया गया कोण ही उस बिन्दु के ढाल के रूप में जाना जाता है।

सीमान्त लागत वक्र जिसका स्वरूप परवलय की तरफ होता है, के अलग–अलग बिन्दुओं पर इसकी ढाल ज्ञात कर इसकी विशेषताओं को स्पष्ट किया जा सकता है। MC वक्र का ऋणात्मक ढाल इस तथ्य की ओर संकेत करता है कि उत्पादन बढ़ने के साथ–साथ सीमान्त लागत घटती है, परन्तु बढ़ते हुये ढाल के अनुरूप कम होती जाती है और डाक न्यूनतम बिन्दु के दांई ओर बढ़ने पर वक्र का ढाल धनात्मक हो जाता है जो यह संकेत

करता है कि कुल उत्पादन के बढ़ने के साथ–साथ सीमान्त लागत भी बढ़ती है परन्तु एक बिन्दु (चित्र में बिन्दु C) के बाद कुल उत्पादन के बढ़ने के साथ साथ समस्त लागत के बढ़ने की दर बढ़ती जाती है।
इस स्थिति को चित्र y में देखा जा सकता है।



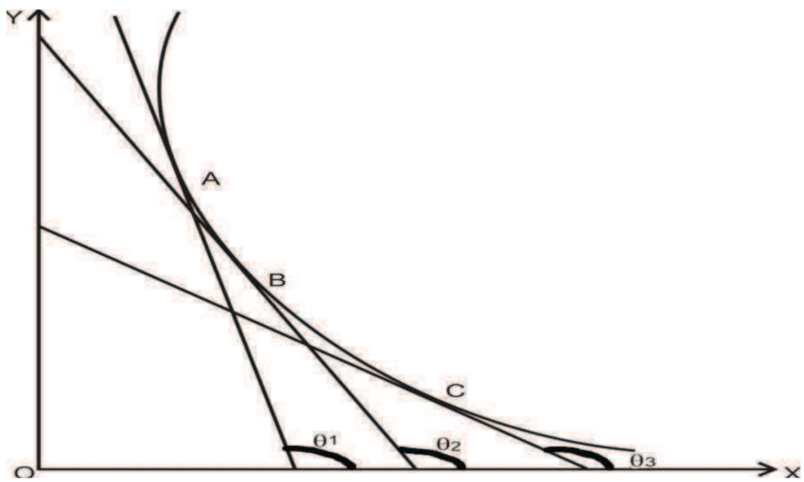
चित्र 4

चित्र 4 में A बिन्दु पर MC वक्र का ढाल $\theta_1 > 90^o$ अत $\tan\ \theta_1$ का मान ऋणात्मक B, बिन्दु पर $\theta_2 = 0$ (क्योंकि स्पर्श रेखा X अक्ष के समान्तर है) तथा C बिन्दु पर $\theta_3 < 90^o$ अतः $\tan\theta_3$ का मान धनात्मक होग। इस तरह बिन्दु A पर MC वक्र का ढाल धनात्मक, B बिन्दु पर शून्य तथा C बिन्दु पर. ऋणात्मक होगा।

लागत सिद्धान्त में प्रयुक्त औसत तथा सीमान्त लागत फलन द्विघातीय फलनों को प्रदर्शित करते हैं। आयतीय अतिपरवलय वक्र द्वारा अनधिमान वक्रों की इस विशेष को समझा जा सकता है। कि जैसे जैसे उपभोक्ता अनधिमान वक्र पर बांये से दाएं तरफ बढ़ेग , X वस्तुओं की उत्तरोक्तर इकाइयों को प्राप्त करने के लिये उसे y वस्तु की घटती हुयी मात्राओं का त्याग करना होगा।

चित्र 5 अनधिमान वक्र IC, A, B तथा C तीन बिन्दुओं से होकर गुजरता है। इन बिन्दुओं से होकर गुजरता है। इस बिन्दुओं से होकर खींची ग्यी स्पर्श रेखाएं अक्ष से क्रमशः θ_1 , θ_2 तथा θ_3 कोण निर्मित करती है। इन बिन्दुओं का ढाल क्रमशः $\tan\theta_1, \tan\theta_2$ तथा $\tan\theta_3$ होगा। चूंकि तीनों कोण θ_1 , θ_2 तथा θ_3 90^o से अधिक है अतः इनके tangent का मान ऋणात्मक होगा। इस तरह वक्र के प्रत्येक बिन्दु का ढाल ऋणात्मक है।

समकोणीय या आयातीय अतिपरवलय वक्र औसत स्थिर लागत वक्रों के लक्षणों को भी स्पष्ट करता है।



चित्र 5

उदाहरण– एक मशीन निर्माता ऑसतन 4 मशीनों को रू0 18000/– प्रति मशीन की दर से प्रतिदिन बेचता है। अपने उत्पादन को ऑसतन $4\frac{1}{2}$ मशीन प्रतिदिन बढ़ाने के लिये उसे कीमत को रू0 17000 प्रति मशीन की दर से घटाने पड़ता है जिससे कि वो अपना समस्त उत्पादन विक्रय कर सके। उसके लाभ फलन को ज्ञात कीजिये–

हल– उपरोक्त समस्या अवास्तविक मान्यताओं जैसे पारम्परिक लागत लेखांकन की कीमत स्थिर रहती है अतः आगम फलन रेखीय है को दूर करता है।
प्रतिदिन बेची गयी मशीनों को मानते हुये उसे कीमत का रेखीय फलन रखा जा सकता है।

$x = ap + b$

$a \& b$ ज्ञात करने पर उनके मानों को सूत्र $\Rightarrow x = 22 - p$

आगय R = कीमत X बेची गयी मशीनों की संख्या

$$R = P \text{ X } X$$

$$R = PX$$

Break even बिन्दु को ज्ञात करने के लिये p को x के फलन के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

तब R x का द्विघात फलन बन जाता है।

$P = 22 - x$ (उपरोक्त सूत्र $x = 22 - p$ दिये होने पर)

$R = px$ में p के मान f को प्रतिस्थापित करने पर

$R = px = (22 - x)x = 22x - x^2$

रेखीय लागत फलन (τ) को 32+7X मान लेने पर जो पहले ज्ञात कर लिया गया कुल लाभ G X, का द्विघात फलन बन जाता है।

$$G = R - T$$

$$= ((22x - x)^2 - (32 + 7x) = -x^2 + 15x - 32$$

यह निर्माता का लाभ फलन है।

12.9 सारांश

जिस समीकरण में चर राशि का महत्तम मान 2 हो, उसे द्विघात समीकरण कहते हैं। दो रेखीय बहुपदीय व्यंजकों के गुणनफल से भी द्विघात समीकरण प्राप्त होता है। इसका मानक रूप ax^2+bc+c है।

सभी द्विघात समीकरणों का गुणनखण्ड निकालना संभव नहीं है। द्विघाती फलन को वर्गत्मक फलन भी कहा जाता है।

फलन $y=ax^2$ का रेखा चित्र एक परवलय होता है। यदि फलन का स्वरूप $xy=a$ है। तब इसका रेखाचित्र खींचने पर हमें समकोणीय अतिपरवलय प्राप्त होता है।

अर्थशास्त्र के अध्ययन एवं विश्लेषण में परवलय तथा समकोणीय अथवा आयातीय अतिपरवलय वक्रों के ढाल का अध्ययन उपयोगी एवं महत्वपूर्ण होता है। क्योंकि इससे इस तथ्य की जानकारी मिलती है कि एक आर्थिक चर में परिवर्तन होने पर दूसरे आर्थिक चर पर क्या प्रभाव पड़ता है, तथा उसके परिवर्तन की दिशा क्या होगी।

लागत सिद्धान्त में प्रयुक्त औसत तथा सीमान्त लागत फलन द्विघातीय फलनों को प्रदर्शित करते है। आयातीय अतिपरवलय द्वारा अनधिमान वक्रों की विशेषता को समझा जा सकता है। समकोणीय या आयातीय अतिपरवलय वक्र औसत स्थिर लागत वक्रों के लक्षणों को भी स्पष्ट करता है।

12.10 अभ्यास प्रश्नों के उत्तर

1– $2x^2+11x+5$ का गुणनखण्ड निकाले

2– $b^2-4ac<0$ का गुणखण्ड निकालना संभव है अथवा नहीं ?

3– द्विघात समीकरण को हल करने पर चर के हमेशा .... में प्राप्त होते हैं।

4– कोई भी द्विघात समीकरण किन तीन विधियों द्वारा हल किया जा सकता है।

5– $91x^2+20x+1=0$ के मूल निकाले।

$6x^2-x-35=0$ के मूल निकाले।

6– द्विघाता समीकरणों के विविक्त (Discriminant)ज्ञात करें।

(i) $x^2-4x-3=0$

(ii) $3x^2+4x-3=0$

उत्तर–

1–$(2x+1)(x+5)$, 2–नहीं ,3–2 ,4–गुणनखण्ड विधि, सूत्र विधि, द्रुत विधि

5–$\frac{-1}{3}$, $\frac{-1}{7}$ 6–$\frac{5}{2}$, $\frac{-7}{3}$

12.11 संदर्भ सहित ग्रन्थ

- शुक्ला एवं सहाय (2004) ''परिमाणात्मक पद्धतियां'' साहित्य भवन पब्लिकेशन्स आगरा।

- एम0टायरा एवं के0 कुन्दन (2011)– ''क्विकर मैथ्स'' बी0एस0सी0 पब्लिशिंग कं0 प्रा0लि0 दिल्ली।
- Punjab Technical University (2006): Quantitative Techniques MBA (104)
- K. C. Sinha (1999) : A TeXt book of Algebra, Students' Friends Publisher, Patna
- R. D. Sharma (2007) : Objective Mathematics, Dhanpati Rai Publication, New Delhi
- M. L. Uprety & Dr. S. Sharma (2011-12) : Intermediate Algebra, Ravi Offset Printers & Publisher, Agra

12.12उपयोगी/सहायक ग्रन्थ

- P.N. Mishra: QuantitativeTechnique for Managers , eXel Books
- E.R. Jufee: "The usual display of Quantitative Information, Graphic Press
- D.R.D.J. Jweezy and T.A. Williane Anderson Quantitative Methods for business, 5th edition, west Publishing Company.

12.13 निबन्धात्मक प्रश्न

1– द्विघात समीकरणों का स्पष्ट व्याख्या कीजिये।
2– द्विघात समीकरण की मान्यता लिखिये।
3– द्विघात समीकरणों को हल करने की विधियों को विस्तार से समझाइये।
4– सिद्ध करो कि समीकरण $X^2 + X + 1 = 0$ के मूलों के व्युत्क्रमों से बना समीकरण यही रहता है।

इकाई 13 समांगी उत्पादन फलन और प्रमेय
(Concurrent Production Function and Theorem)

13.1 प्रस्तावना
13.2 उद्देश्य
13.3 उत्पादन फलन का अर्थ
13.4 उत्पादन फलन की मान्यतायें एवं विशेषतायें
13.5 उत्पादन फलन के प्रकार
13.6 समांगी उत्पादन फलन
13.7 समांगी उत्पादन फलन के विभिन्न स्वरूप
13.8 समांगी उत्पादन फलन का चित्रों से निरूपण
13.9 समांगी उत्पादन फलन पर आधारित प्रमेय
13.10 प्रतिस्थापन लोच
13.11 समांगी उत्पादन फलन के महत्व तथा उपयोग
13.12 महत्वपूर्ण समांगी उत्पादन फलन
13.13 सारांश
13.14 शब्दावली
13.15 लघु उत्तरीय प्रश्न
13.16 सन्दर्भ ग्रन्थ सूची
13.17 दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

13.1 प्रस्तावना

अर्थशास्त्र के अध्ययन में तथा विशेष तौर पर शोधकार्य में ऑकड़ों का अत्याधिक महत्वपूर्ण तथा निर्णायक उपयोग होता है क्योंकि ऑकड़ो के ऊपर ही समस्त विश्लेषण एवं निष्कर्ष आधारित होते हैं। ऑकड़ों का समुचित उपयोग अर्थशास्त्र के अध्ययन में किया जा सके। इसके लिये आवश्यक है कि ऑकड़ों का संकलन तथा प्रस्तुतीकरण वैज्ञानिक तौर तरीकों से किया जाये। पूर्व की इकाई में इसी सन्दर्भ में व्यापक अध्ययन किया गया है।

अर्थशास्त्र में परिमाणात्मक विधियों का प्रयोग अर्थपूर्ण तभी हो सकता है जबकि ऑकड़ों का संकलन तथा प्रस्तुतीकरण समुचित तौर पर किया गया हो। अर्थशास्त्र कई महत्वपूर्ण उत्पादन फलनों का अध्ययन भी ऑकड़ों पर ही आधारित है। वर्तमान ईकाई में उत्पादन फलन की विभिन्न अवधारणओं के बारे में एवं खास तौर पर संमाग उत्पादन फलन तथा उससे सम्बन्धित प्रमेयों का अध्ययन किया जायेग।

उत्पादन फलन में उत्पादन के साधनों तथा उनके आपसी सम्बन्धों एवं तत् पश्चात् साधनों के उत्पादन पर प्रभाव का अध्ययन किया जाता है। यानि आग्त (इनपुट) तथा निर्गत (आउटपुट) में क्या सम्बन्ध स्थापित हो रहा है इन सम्बन्धों के आधार पर उत्पादन फलनों की प्रकृति तथा विशेषतायें निर्धारित होती है जिन का व्यापक अध्ययन वर्तमान में व्यापक तौर पर किया जायेग।

13.2 उद्देश्य

वर्तमान इकाई में निम्न उद्देश्यों का अध्ययन किया जायेगा –

- ✓ उत्पादन फलन क्या होता है?
- ✓ उत्पादन फलन की मान्यतायें तथा विशेषतायें कौन-कौन सी है?
- ✓ महत्वपूर्ण उत्पादन फलन कौन-कौन से है?
- ✓ समांगी उत्पादन फलन से क्या तात्पर्य है?
- ✓ समांगी उत्पादन फलन की विशेषतायें कौन-कौन सी है?
- ✓ समांगी उत्पादन फलन से सम्बन्धित कौन-कौन सी प्रमेय है तथा इनको किस प्रकार सिद्ध किया जा सकता है?
- ✓ समांगी उत्पादन फलन का अर्थशास्त्र के अध्ययन में क्या महत्व तथा उपयोग है?

13.3 उत्पादन फलन का अर्थ

उत्पत्ति के नियमों की व्यापक विवेचना उत्पादन फलन के विश्लेषण से ही आरम्भ होती है। उत्पादन प्रक्रिया में उत्पादन के साधनों की सहायता यानि आदा यानि इनपुट कहा जाता है तथा जिस वस्तु का उत्पादन होता है उसे प्रदा यानि आउटपुट कहते है। आदा तथा प्रदा के मध्य तकनीकी सम्बन्ध को उत्पादन फलन से व्यक्त करते है। अथवा आगतो (इनपुट) तथा निर्गतों ((आऊटपुट) की मात्राओं के मध्य फलनात्मक सम्बन्धों को उत्पादन फलन व्यक्त करता है।

जैसे $Q= f\,(L,K)$

जहाँ Q = उत्पादन, f= फलन L = श्रम K = पूंजी।

यह उत्पादन फलन मात्र उत्पादन के दो साधनों श्रम तथा पूंजी पर ही निर्भर है।

प्रो0 वाटसन के अनुसार, ***"किसी फर्म की भौतिक आगतों तथा उत्पाद की भौतिक मात्रा के बीच के सम्बन्ध को उत्पादन फलन कहते है।"'***

प्रो0 सैम्यूलसन के अनुसार, ***"उत्पादन फलन वह तकनीकी सम्बन्ध है जो यह बताता है कि आगतों के प्रत्येक विशेष समूह द्वारा कितना उत्पादन किया जा सकता है। यह सम्बन्ध किसी दिये हुये तकनीकी ज्ञान के स्तर के लिये व्यक्त किया जाता है।"***

13.4 उत्पादन फलन की मान्यतायें एवं विशेषतायें

उत्पादन फलन तभी सुचारू रूप से क्रियाशील रहता है जबकि निम्न मान्यताओं का पालन हो रहा हो-

1) उत्पादन फलन एक निश्चित समय से सम्बन्धित होता है।
2) साधनों की कीमत तथा तकनीकी में कोई परिवर्तन नहीं होना चाहिये।
3) फर्म का लागत व्यय दिया हुआ है।
4) श्रम समरूप है तथा पूंजीगत ईकाई में दिये समय में हास नहीं हो रहा है।

यह उपरोक्त मान्यतायें समांगी उत्पादन फलन समेत सभी उत्पादन फलनों की है। इसी प्रकार सभी उत्पादन फलनों की कुछ सामान्य विशेषतायें होती है जोकि निम्नवत् है-

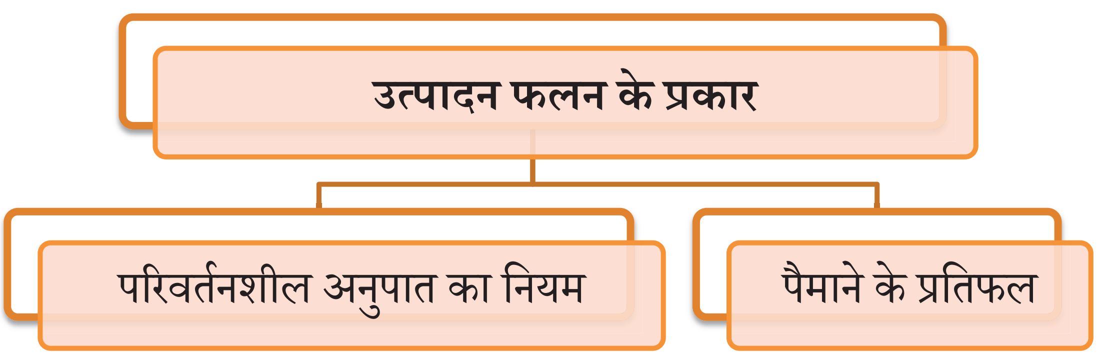
1) उत्पादन फलन उत्पाद तथा साधनों के मध्य फलनात्मक एवं तकनीकी सम्बन्ध स्थापित करते है।
2) उत्पादन फलन मूल्य निरपेक्ष होता है एवं फलन की कोई भी मौद्रिक विशेषता नहीं होती है। अर्थात फलन का सम्बन्ध केवल उत्पादन की भौतिक मात्रा से है।
3) उत्पादन के साधनों को एक दूसरे के लिये प्रतिस्थापित किया जा सकता है।
4) मूल तथा उत्पादन फलन आर्थिक अवधाणा के बजाय इंजीजियरिंग की अवधारणा मानी जाती है।
5) उत्पादन फलन स्थैतिक अर्थशास्त्र का विषय है क्योंकि यह साधनों की कीमत तकनीकी ज्ञान का स्तर एवं समयावधि को निश्चित मानकर कार्य करता है।

13.5 उत्पादन फलन के प्रकार

साधनों की स्थिरता एवं परिवर्तनशीलता के आधार पर उत्पादन फलन दो प्रकार के होते है

(अ) परिवर्तनशील अनुपात का नियम।

(ब) पैमाने के प्रतिफल।



(अ) परिवर्तनशील अनुपात का नियम –

परिवर्तनशील अनुपात के नियम का "Law of Variable Proportions" कहते है यह उत्पादन फलन अल्पकाल में ही लागू होता है। इस उत्पादन फलन के अन्तर्गत एक साधन को स्थिर रखकर दूसरे साधन को परिवर्तनशील बनाया जाता है। इसे हासमान प्रतिफल का नियम भी कहते है।

मार्शल ने हासमान प्रतिफल के नियम को मात्र कृषि तक ही सीमित रखा परन्तु आधुनिक अर्थशास्त्रियों के अनुसार यह सभी क्षेत्रों में लागू होता है।

यदि पूंजी को स्थिर किया जाये एवं श्रम की मात्रा में परिवर्तन किया जाये तो इस उत्पादन फलन में तीन स्थितियाँ या चरण प्राप्त होते है।

1) प्रथम चरण में कुल उत्पादन बढती हुयी दर से प्राप्त होते है साथ ही सीमांत तथा औसत उत्पादन भी बढते हैं।
2) द्वितीय चरण कुल उत्पादन घटती हुयी दर से बढ़ता है तथा अधिकतम हो जाता है। सीमांत उत्पादन गिरता है तथा औसत उत्पादन के बराबर हो जाता है। उत्पादन की दृष्टि से यही अनुकूल चरण होता हैं।
3) तीसरे चरण में कुल सीमांत तथा औसत उत्पादन सभी गिरते है।

(ब) पैमाने के प्रतिफल –

पैमाने के प्रतिफल को अंग्रेजी “Return to Scale” कहते है यह उत्पादन फलन दीर्घकाल में लागू होता है तथा उत्पादन के सभी साधन परिवर्तनशील होते है। यह पैमाने के प्रतिफल तीन प्रकार के होते है जिनके बारे में विस्तार से चर्चा इकाई में आगे की जायेगी।

13.6 समांगी उत्पादन फलन

इस उत्पादन फलन को समरूप उत्पादन फलन भी कहते है अंग्रेजी में इसे “Homogenous Production Function” कहते है। समांगी उत्पादन फलन के महत्वपूर्ण उत्पादन फलन है तथा अर्थशास्त्र के अध्ययन में इसका व्यापक उपयोग होता है। यदि किसी उत्पादन फलन में सभी आग्तो को m गुना बढ़ा दिया जाये तथा निर्गत या उत्पादन भी m की किसी घात के गुणन के रूप में बढ़ जाता है तो उत्पादन फलन को समांगी उत्पादन फलन कहते है। गणितीय रूप में इसे निम्न रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

Q= f (L, K) --(i)

यदि आगतों को m गुना बढ़ाया जाये तो नया उत्पादन फलन

P = f (mL, mK) ---(ii)

यदि P = mk f (L, K) --(iii)

इस प्रकार आगतों को m गुना बढ़ाने पर यदि उत्पादन को m की घात K के रूप में अगर व्यक्त किया जा सके तो उत्पादन फलन समांगी या समरूप होता है। m की घात K “समरूपता की कोटि” कहलाती है। यहाँ m कोई वास्तविक अंक है तथा K एक स्थिर राशि है। यह उत्पादन फलन K कोटि का समांगी उत्पादन फलन है। इस उत्पादन फलन में दो महत्वपूर्ण तथ्य है पहला यह है कि m पूरी तरह गुणनखंड की प्रक्रिया के माध्यम से फलन के बाहर निकाला जा सके तथा दूसरा यह की m की घात K पूरी तरह से उत्पादन फलन की प्रकृति को व्यक्त करती है। यदि K=1 , तो उत्पादन फलन प्रथम कोटि का समांगी उत्पादन फलन होगा। जिसे रेखीय रूप से समरूप उत्पादन फलन भी कहते है।

यदि K=2, तो उत्पादन फलन द्वितीय कोटि का समरूप उत्पादन फलन होगा। इसी प्रकार K=n होने पर उत्पादन फलन n कोटि का समरूप उत्पादन फलन होगा। समांगी उत्पादन फलन को निम्न उदाहरणों से और भी बेहतर समझा जा सकता है।

उदाहरण नं0 1, $Z = f\ (X, y) = \sqrt{ax^2 + \ bxy + cy^2}$

सिद्ध कीजिये कि यह समांगी उत्पादन फलन है तथा इसकी कोटि भी ज्ञात कीजियें?

हल – यदि आगतो को m से गुणा किया जाये तो

$$f(mX, my) = \sqrt{a(mx)^2 + b(mx)(my) + c(my)^2}$$
$$= \sqrt{m^2ax^2 + bm^2xy + m^2cy^2}$$
$$= \sqrt{m^2(ax^2 + bxy + cy^2}$$
$$= m\sqrt{ax^2 + bxy + cy^2}$$
$$m. f(X, y) = mz$$

चूँकि इसे f (mX, my) = m (X, y) के रूप में व्यक्त किया जा सकता है अतः यह समांगी उत्पादन फलन है एवं m की घात K का मान यहाँ पर '1' है। अतः समरूपता की कोटि भी एक होगी।

उदाहरण नं0 2 – z = f (X, y) = सिद्ध कीजिये कि यह एक समांगी उत्पादन फलन है तथा इसकी कोटि भी ज्ञात कीजिये?

हल – आगतों को m से गुणा करने पर

$$f\ (mX, my)\ = \frac{(mx)^2}{(my)^3}$$

$$= \frac{m^2x^2}{m^3y^3} = \frac{1}{m}\frac{x^2}{y^3} = m^{-1}\frac{x^2}{y^3}$$
$$f\ (mX, my) = m^{-1}f(X, y) = m^{-1}z$$

अतः यह एक समांगी उत्पादन फलन है तथा इसकी कोटि -1' है।

13.7 समांगी उत्पादन फलन के विभिन्न स्वरूप

समांगी उत्पादन फलन के प्रकार तथा प्रकृति m की घात K पर निर्भर करती है जिसके आधार पर प्रतिफल निर्धारित होते है तथा उनके ऊपर उत्पादन फलन का स्वरूप निर्भर करता है जो कि निम्नवत् है

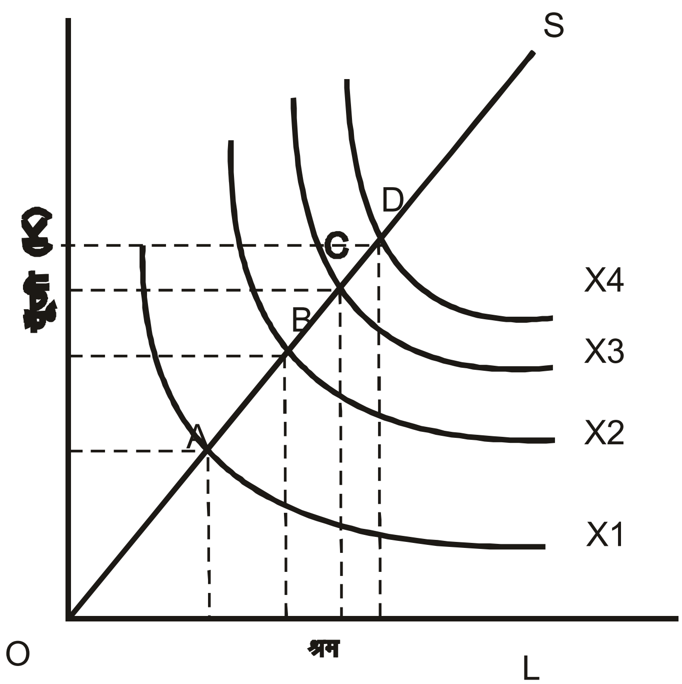
1) यदि m^k में K = 1 तो पैमाने के स्थिर प्रतिफल प्राप्त होगें। ऐसे उत्पादन फलन को प्रथम कोटि का समरूप उत्पादन फलन कहते है। इसे रेखीय रूप से समरूप उत्पादन फलन के नाम से भी जाना जाता है। इस उत्पादन फलन की मुख्य विशेषता यह होती है कि यदि उत्पादन के साधनों को जितने गुना बढ़ाया जाता है उत्पादन भी उसी अनुपात में बढ़ता है। यदि आगत दुगनी कर दी जायें तो निर्गत भी दुगनी हो जायेगी।
2) यदि m^K में K > 1 तो पैमाने के बढ़ते हुये यानि वृद्धिमान प्रतिफल प्राप्त होगे तथा उत्पादन फलन का स्वरूप वृद्धिमान प्रकार का होग। इसके अतरत आगतों में वृद्धि की तुलना में निर्गत में वृद्धि अधिक अनुपात में होती है। यानि अगर आगतों में दुगनी वृद्धि कर दी जाये तो निर्गत में वृद्धि दुगनी से अधिक होगी।
3) यदि m^k में K < 1 तो पैमाने के बढ़ते हुये यानि ह्रासमान प्रतिफल प्राप्त होगें तथा उत्पादन फलन का स्वरूप ह्रासमान प्रकार का होग। इसके अन्तर्गत आगतों में वृद्धि की तुलना में निर्गत में वृद्धि कम अनुपात में होती है। यदि आग्तों को दुगने से बढ़ाया गया है तो निर्गत में वृद्धि दुगने से कम होगी।

समांगी उत्पादन फलन एवं पैमाने के प्रतिफल पैमाने के प्रतिफल उत्पादन फलन की दीर्घ कालीन प्रवृति को प्रर्दशित करते है। दीर्घकाल में पैमान के सभी साधन परिवर्तनशील होते है। साधनों में होने वाले परिवर्तनों के कारण से पैमाने पर मिलने वाले प्रतिफलों में भी परिवर्तन आता है तथा यह प्रतिफल बढ़ते हुये, घटते हुये तथा स्थिर प्रकार के हो सकते है। जिन्हें समांगी उत्पादन फलन अनुसार निम्न प्रकार से समझाया जा सकता है :

(अ) पैमाने के वर्द्धमान प्रतिफल

यदि उत्पत्ति के साधनों में एक निश्चित अनुपात में वृद्धि की जाती है परन्तु इसके कारण से मिलने वाला प्रतिफल में वृद्धि अधिक अनुपात में हो जाती है तो यह बढ़ते हुये या वर्द्धमान प्रतिफल कहलायेगा यानि । उत्पादन में अनुपातिक वृद्धि > साधनों की मात्रा में अनुपातिक वृद्धि अतः यदि उत्पादन के साधनों में 20 प्रतिशत अनुपात से वृद्धि की जाये तो उत्पादन में वृद्धि 20 प्रतिशत से अधिक हो जाती है तो यह वर्द्धमान प्रतिफल का उदाहरण होगा। चित्र में OS रेखा पैमाने को निरूपित करती है तथा X_1,X_2, X_3, X_4 उत्पादन की क्रमशः 100, 200, 300, 400 ईकाई को निरूपित करते है। अतः स्पष्ट है कि उत्पादन में समान वृद्धि करने हेतु उत्पत्ति के साधनों में वृद्धि का अनुपात कम होता जायेग तथा सम उत्पाद वक्रों के मध्य दूरी निरतंर घटती जायेगी।

यानि AB > BC > CD जो कि वर्द्धमान प्रतिफल को निरूपित करता है। यानि $\alpha + \beta > 1$

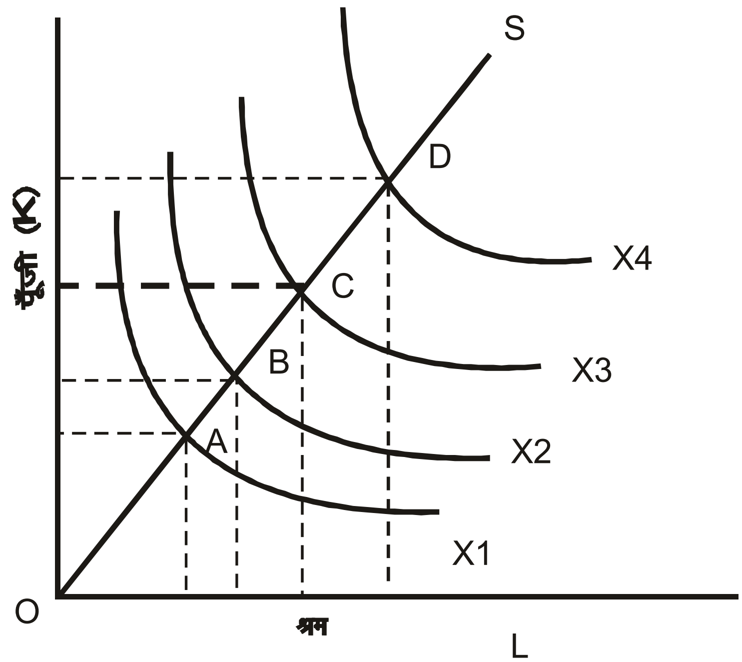


(ब) पैमाने का ह्रासमान प्रतिफल

इसके अनुसार उत्पत्ति के साधनों को जिस अनुपात में बढाया जाता है उसकी तुलना में उत्पादन में वृद्धि कम अनुपात में होती है तथा X_1, X_2, X_3, तथा X_4 सम उत्पाद वक्रों के मध्य दूरी निरंतर बढ़ती जाती है।

AB<BC<CD

इस उत्पादन प्रक्रिया में उत्पादन में समान वृद्धि अर्थात 100 इकाई के लिये बढ़ते हुये साधनों की आवश्यकता पड़ेगी। यानि $\alpha + \beta < 1$

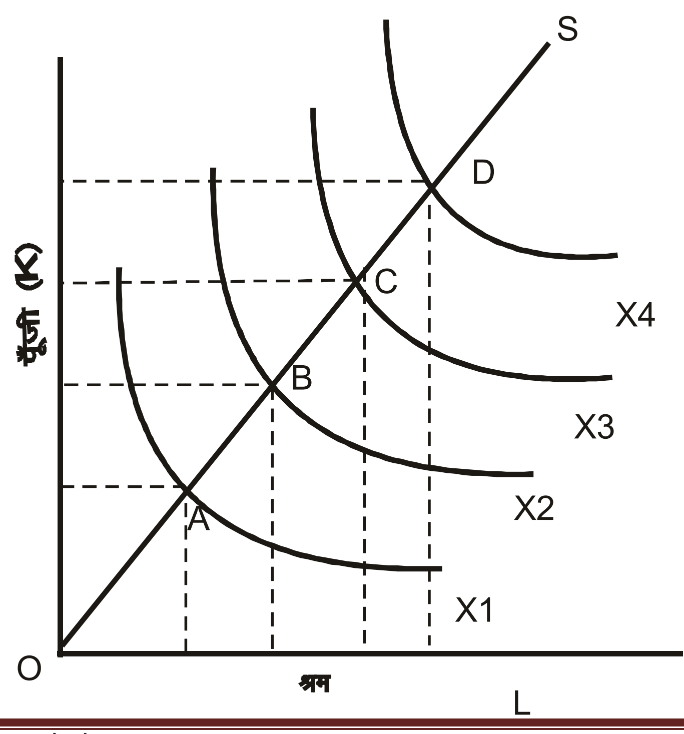


चित्र में OS रेखा पैमाने को निरूपित करती है तथा - X_1,X_2, X_3, X_4 P उत्पादन की क्रमश: 100, 200, 400 ईकाई को निरूपित करते है।

अतः स्पष्ट है कि उत्पादन में समान वृद्धि करने हेतु उत्पत्ति के साधनों में वृद्धि का अनुपात बढता जायेगा तथा सम उत्पाद वक्रों के मध्य दूरी निरतंर बढती जायेगी।

(स) पैमाने के स्थिर प्रतिफल

इस नियम के अनुसार यदि उत्पत्ति के समस्त साधनों को एक निश्चित अनुपात में बढ़ाया जाये तो उत्पादन भी उसी निश्चित अनुपात में बढ़ता है। सम उत्पाद वक्रों के मध्य दूरी समान बनी रहेंगे तथा उत्पादन में प्रत्येक 100 ईकाई की वृद्धि में उत्पत्ति के समान साधनों की आवश्यकता होगी।

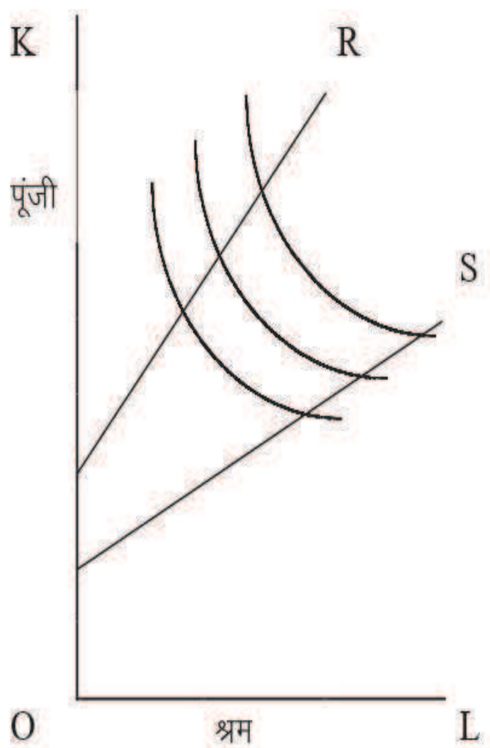


यानि AB = BC = CD

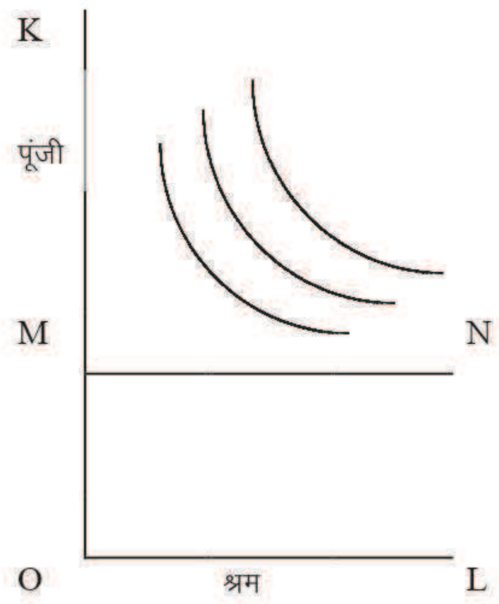
चित्र में OS रेखा पैमाने को निरूपित करती है तथा X_1, X_2, X_3, X_4 उत्पादन की क्रमशः 100, 200, 300, 400 ईकाई को निरूपित करते है। अतः स्पष्ट है कि उत्पादन में समान वृद्धि करने हेतु उत्पत्ति के साधनों में वृद्धि का अनुपात समान ही रहेगा तथा सम उत्पाद वक्रों के मध्य दूरी हमेशा समान रहेगी।

13.8 समांगी उत्पादन फलन का चित्रों के माध्यम से निरूपण

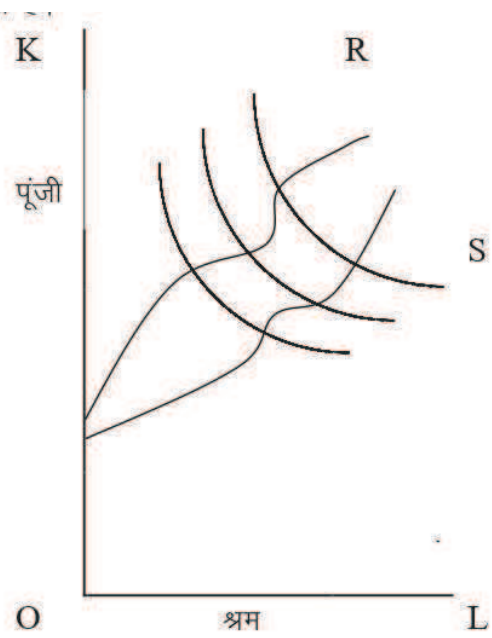
समांगी उत्पादन फलन में सम उत्पाद वक्रों के माध्यम से यह प्रदर्शित किया जाता है कि साधनों के विभिन्न संयोग से समान स्तर का उत्पादन कैसे निरूपित किया जाये तथा सम उत्पाद वक्र में परिवर्तन से उत्पादन के स्तर में भी परिवर्तन होता है। उत्पादन के विस्तार को निरूपित करने हेतु उत्पाद रेखाओं की मुख्य भूमिका होगे। उत्पाद रेखायें उत्पादन में वृद्धि करने का सम्भावित पथ होती है। यदि सभी साधन परिवर्तनशील होते है तो उत्पाद रेखायें मूल बिन्दु से होकर जाती है एवं यदि एक ही साधन परिवर्तनशील तथा दूसरा स्थिर होता है तो उत्पाद रेखा परिवर्तित साधन अक्ष के समान्तर होती है एवं यदि साधन अनुपात में परिवर्तन स्थिर रहता है तो यह रेखाये सम रेखायें कही जाती है। उत्पादन रेखाये उत्पादन फलन के स्तरूप को निर्धारित करती है इसे निम्न तौर पर प्रदर्शित किया जा सकता है



यदि उत्पादन परिवर्ती अनुपात उत्पादन फलन के अन्तर्गत है तो उत्पाद रेखा परिवर्तित साधन अक्ष के समान्तर होग। चित्र में श्रम परिवर्तित साधन तथा पूंजी स्थिर साधन है। M N उत्पाद रेखा होगी।



यदि दोनों साधन परिवर्तनशील है तो उत्पाद रेखा मूल बिन्दु से होकर जायेगे तथा प्रत्येक उत्पाद रेखा पर $\frac{K}{L}$ अनुपात एवं सीमांत प्रतिस्थापन की दर भी स्थिर होगी। यदि उत्पादन फलन समांगी है तो उत्पाद रेखायें सीधी रेखाओं के रूप में होगी जोकि OR तथा OS द्वारा निरूपित है।



यदि उत्पादन फलन संमागे नहीं है तो उत्पाद रेखायें जैसे OR तथा OS टेढ़ी-मेढ़ी होगी।

13.9 समांगी उत्पादन फलन पर आधारित प्रमेय

समांगी उत्पादन फलन पर आधारित प्रमेयों को प्रथम कोटि के समांगी उत्पादन फलन के अनुसार सिद्ध किया जायेग तथा तत् पश्चात् उन्हें अन्य कोटि के समांगी उत्पादन फलनों पर लागू किया जायेगा। प्रथम प्रमेय-प्रथम कोटि

के समांगी उत्पादन फलन को निम्न रूप में लिखा जा सकता है।

$z = x\,P\left(\frac{y}{x}\right)$ या $z = y\,q\left(\frac{x}{y}\right)$

हल- चूंकि दिया उत्पादन फलन $z = f(X, y)$ प्रथम कोटि का समांगी उत्पादन फलन है अतः $z = f(Kx, Ky) = K.f(x,y)$

यदि $K = \frac{1}{x}$ तो

$\frac{1}{x} f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$

$f(x, y) = x\, f\left(1, \frac{y}{x}\right)$

अतः $f(x,y) = xP\left(\frac{y}{x}\right)$

इसी प्रकार यदि $K = \frac{1}{y}$ तो

$f\left(\frac{x}{y}, 1\right) = \frac{1}{y} f(x,y)$

$f(x,y) = y\, f\left(\frac{x}{y}, 1\right) = y\,q\left(\frac{K}{y}\right)$

इसी तरह इस प्रमेय को n कोटि के समांगी उत्पादन फलन हेतु निम्नवत् रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$z = x^n . P\left(\frac{y}{x}\right) = y^n q\left(\frac{x}{y}\right)$

उदाहरण – $z = f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 y}$

इसको $x.P\left(\frac{y}{x}\right)$ के रूप में लिखियें।

हल- $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 y} = x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}$

$= x\left(x^{-\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}\right)$ क्योंकि 2/3 = 1-1/3)

अतः $f(x,y) = x\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = x.P\left(\frac{y}{x}\right)$

जहाँ $P(x) = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$

द्वितीय प्रमेय- दिये गये प्रथम कोटि के समांगी उत्पादन फलन में आश्रित चर का आंशिक अवकलन गुणांक (डेरीवेट्विय) ($\frac{\partial z}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial z}{\partial y}$) X एवं y के अनुपात के फलन होते है।

यदि $Z = f(x,y)$

हल : प्रथम प्रमेय से $z = x\,P\left(\frac{y}{x}\right)$

$\frac{\partial z}{\partial x} = P\left(\frac{y}{x}\right) + P^1\left(\frac{y}{x}\right) . \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)$ (गुणन नियम से)

$P^1\left(\frac{y}{x}\right)$ जहाँ $P\left(\frac{y}{x}\right)$ का अवकलन गुणांक है।

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \mathrm{P}\left(\frac{y}{x}\right) + P^1\left(\frac{y}{x}\right).\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \mathrm{P}\left(\frac{y}{z}\right) - \frac{y}{x}\ P^1\left(\frac{y}{x}\right)$$

अतः $\frac{\partial z}{\partial x}$ X तथा y के अनुपात का फलन होग तथा यह शून्य कोटि का होगा।

इसी प्रकार $z = x\ P\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + \mathrm{x}.\ P^1\left(\frac{y}{x}\right).\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \mathrm{x}.P^1\left(\frac{y}{x}\right).\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = P^1\left(\frac{y}{x}\right)$$

अतः $\frac{\partial z}{\partial y}$, X तथा y के अनुपात का फलन होग तथा यह शून्य कोटि का होगा।

यदि उक्त प्रमेय को n कोटि के समांगी फलन के सिद्ध किया जाये तो

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \mathrm{n}x^{n-1}\mathrm{P}\left(\frac{y}{x}\right) - x^{n-2}.P^1\left(\frac{y}{x}\right)$$

N कोटि का समांगी उत्पादन फलन का आंशिक उत्पाद (n-1) कोटि का समांगी उत्पादन फलन होगा। इसी प्रकार

$$= \frac{\partial z}{\partial x} = x^{n-1}P^1\left(\frac{y}{x}\right)$$

तृतीय प्रमेय– तृतीय प्रमेय को आयलर प्रमेय के नाम से भी जाना जाता है। इस प्रमेय के अनुसार प्रथम कोटि के समांगी उत्पादन फलन को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता

$$\mathrm{x}\frac{\partial z}{\partial y} = \mathrm{y}.\frac{\partial z}{\partial y} = \mathrm{z}$$

हल : यदि $z = f(x,y)$

द्वितीय प्रमेय से $\frac{\partial z}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial z}{\partial y}$ है, का मान $x\frac{\partial z}{\partial y} + y.\frac{\partial z}{\partial y}$ में रखने पर

$$= \mathrm{x}.[\mathrm{P}\left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y}{x}\right).P^1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)] + \mathrm{y}P^1\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \mathrm{x}.[\mathrm{P}\left(\frac{y}{x}\right) - y.P^1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)] + \mathrm{y}P^1\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \mathrm{x}.\mathrm{P}\left(\frac{y}{x}\right) = \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{z}$$

जिसे प्रथम प्रमेय के अनुसार f (X,y) के समान कहा जा सकता है। यदि उत्पादन फलन n कोटि का समांगी उत्पादन फलन है तो

$$\mathrm{x}\frac{\partial z}{\partial y} + \mathrm{y}.\frac{\partial z}{\partial y} = \mathrm{nz}$$

अर्थशास्त्र में आयलर प्रमेय का बढ़ा महत्व है इसके अनुसार यदि उत्पादन स्थिर पैमाने के प्रतिफल के अन्तर्गत हो रहा हो एवं यदि उत्पादन के साधनों को उनके सीमांत उत्पाद के समान भुगतान किया जाये तो कुल भुगतान कुल उत्पादन के समान होता है यानि कुल उत्पादन मात्र साधनों के भुगतान में ही समाप्त हो जायेगा।

उदाहरण- यदि कॉब डगलस उत्पादन फलन को यदि लिया जाये

Q =A $L^{\propto}K^{1-\propto}$

$L\,M\,P_L + K\,M\,P_K = Q$ होना चाहिए।

हल : Q =A $L^{\propto}K^{1-\propto}$

$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = A \propto L^{\propto-1}K^{1-\propto}$

$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial L} = A\,(1-\alpha)L^{\propto-1}K^{-\propto}$

MP_L तथा MP_K का मान ($L\,M\,P_L + K\,M\,P_K$) में रखने पर = $L\,A \propto L^{\propto-1}K^{1-\propto} + K\,A\,(1-\alpha)L^{\propto-1}K^{-\propto}$

= $[\,A\,\alpha L^{\propto}K^{1-\propto} + K\,A\,(1-\propto)L^{\propto-1}K^{1-\propto}]$

= $AL^{\propto}K^{1-\propto}\,[\alpha\ + 1-\propto]$

= $AL^{\propto}K^{1-\propto}$

जो कि Q के बराबर है। अतः कॉब डगलस उत्पादन फलन आयलर प्रमेय के निष्कर्षों को सही सिद्ध करता है।

13.10 प्रतिस्थापन लोच

किसी भी रेखीय समांगी फलन Q = f (x_1, x_2) की प्रतिस्थापन लोच x_1 तथा x_2 के मध्य निम्न सूत्र से प्राप्त की जा सकती है।

$\sigma = \frac{f_1\,f_2}{Q\,f_1\,f_2}$

f_1 जहाँ x_1 के सापेक्ष Q का अवकलन है।

f_2 जहाँ x_2 के सापेक्ष Q का अवकलन है।

f_{12} जहाँ x_1 तथा x_2 के सापेक्ष अवकलन है। उदाहरण- उक्त सूत्र के माध्यम से कॉब डगलस उत्पादन फलन की प्रतिस्थापन लोच ज्ञात कीजियें?

हल- कॉब डगलस उत्पादन फलन

Q =A $L^{\propto}K^{1-\propto}$

$f_1 = f_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = A \propto L^{\propto-1}K^{1-\propto}$

$f_2 = f_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = A(1-\propto)\,L^{\propto-1}K^{-\propto}$

एवं $f_{KL} = \frac{\partial^2 Q}{\partial L\,\partial K}$

इसके लिये पहले $\frac{\partial Q}{\partial L} = A \propto L^{\propto-1}K^{1-\propto}$

पुनः K के सापेक्ष अवकलन करने पर $\frac{\partial^2 Q}{\partial L\,\partial K} = A \propto (1-\propto)L^{\propto-1}K^{-\propto}$

उक्त समीकरण का मान सूत्र $\sigma = \frac{f_1\,f_2}{Q\,f_1\,f_2}$ में रखने पर -

$$\sigma = \frac{(A\propto L^{\propto-1}K^{1-\propto})[A(1-\propto)L^{\propto}K^{-\propto}]}{(AL^{\propto}K^{1-\propto})[A\propto(1-\propto)L^{\propto-1}K^{-\propto}]}$$

$\sigma = 1$

अतः कॉब डगलस उत्पादन फलन की लोच एक होगी।

13.11 समांगी उत्पादन फलन के महत्व तथा उपयोग

समांगी उत्पादन फलन तथा इसके ऊपर आधारित प्रमेयों के उपयोग अर्थशास्त्र के अध्ययन में बड़े ही महत्वपूर्ण है। इनका उपयोग न सिर्फ उत्पादन की प्रक्रिया में किया जा सकता है बल्कि इनका प्रयोग वितरण तथा आर्थिक संवृद्धि एवं विकास के क्षेत्र में किया जा सकता है जोकि निम्नवत् है-

1) समांगी उत्पादन फलन के अन्तर्गत ह्रासमान, स्थिर तथा वृद्धिमान प्रतिफल के उत्पादन फलन आते है जिनका उपयोग किसी भी परिस्थिति तथा उद्देश्य हेतु अधिक व्यवहारिक ढंग से किया जा सकता है।
2) समांगी उत्पादन का उपयोग कृषि, विनिर्माण तथा अन्य महत्वपूर्ण उत्पादन की गतिविधियों के लिये किया जा सकता है।
3) समांगी उत्पादन फलन का वितरण के क्षेत्र में भी व्यापक महत्व एवं उपयोग है इसके माध्यम से श्रम तथा पूंजी का राष्ट्रीय आय में हिस्सेदारी ज्ञात की जा सकती है। जिसे अगली इकाई में विस्तार से बताया गया है।
4) श्रम तथा पूंजी अनुपात में परिवर्तन का उत्पादन तथा वितरण पर क्या प्रभाव पड़ रहा है इसको ज्ञात किया जा सकता है।
5) समांगी उत्पादन फलन के माध्यम् का शोध अध्ययनों में बड़ा ही उपयोग है इनके उपयोग के माध्यम में महत्वपूर्ण उत्पादक क्षेत्रों में दीर्घ कालिक प्रवृतियाँ ज्ञात की जा सकती है।
6) अर्थशास्त्रियों द्वारा कई महत्वपूर्ण उत्पादन फलनों का निर्माण जैसे कॉब डगलस उत्पादन फलन स्थिर प्रतिस्थापन लोच उत्पादन फलन (सी0 ई0 एस0 उत्पालन फलन) किया गया है जिनका अर्थशास्त्र के अध्ययन में व्यापक उपयोग है।

13.12 महत्वपूर्ण समांगी उत्पादन फलन

महत्वपूर्ण समांगी उत्पादन फलनों में कॉब डगलस उत्पादन फलन एवं स्थिर प्रतिस्थापन लोच उत्पादन फलन प्रमुख है। कॉब डगलस उत्पादन फलन के बारे में विस्तार से पिछली ईकाई में अध्ययन किया जा चुका है वर्तमान ईकाई में यहाँ पर स्थिर प्रतिस्थापन लोच यानि सी0 ई0 एस0 उत्पादन फलन के बारे में संक्षेप में अध्ययन किया जायेगा। स्थिर लोच उत्पादन फलन इस उत्पादन फलन का विकास के0 जे0 ऐरो, एच0 बी0 चेनरी, वी0 एस0 मिनहास तथा आर0 एम0 सोलों द्वारा 1961 में किया गया था। यह एक महत्वपूर्ण उत्पादन फलन है जो कि कॉब डगलस उत्पादन फलन की भाँति रेखीय रूप से समरूप यानि समांगी है। इस उत्पादन फलन को निम्नवत् व्यक्त किया जा सकता है:

$$Q_1 = A\left[\alpha K^{-\beta} + (1-\alpha)L^{-\beta}\right]^{-\frac{1}{\beta}}$$

A, α, β प्राचल (Parameter) हैं जहाँ A दक्षता प्राचल है। α वितरण यानि पूंजी ग्हनता साधन गुणांक है तथा β स्थापना दक्षता है जो कि प्रति स्थापन की लोच को निर्धारित करता है। जहाँ कि

$A > 0, 0 < \alpha < 1$। $\beta > -1$

सी0 ई0 एस0 उत्पादन की मुख्य विशेषतायें

इस उत्पादन फलन की मुख्य विशेषतायें निम्नवत् है:

1) यह उत्पादन फलन भी अन्य रेखीय समांगी उत्पादन फलनों की भाँति है यदि उत्पत्ति के साधनों में n गुना वृद्धि कर दी जाये तो कुल उत्पादन भी n गुना बढ़ जायेगा।

$$Q_1 = A\left[\alpha(nK)^{-\beta} + (1-\alpha)(nL)\right]^{-\frac{1}{\beta}}$$

$$Q_1 = A\left(n^{-\beta}\right)^{-\frac{1}{\beta}}\left[\alpha K^{-\beta} + (1-\alpha)L^{-\beta}\right]^{-\frac{1}{\beta}}$$

$$Q_1 = nA\left[\alpha K^{-\beta} + (1-\alpha)L^{-\beta}\right]^{-\frac{1}{\beta}}$$

$$Q_1 = \mathrm{nQ}$$

2) सी0 ई0 एस0 उत्पादन फलन की लोच β द्वारा निर्धारित होती है।

$\sigma = \frac{1}{1+\beta}$ यदि $\beta = 0$ तो इस दशा में यह कॉब डगलस उत्पादन फलन को निरूपित करता है।

3) सी0 ई0 एस0 उत्पादन आयलर प्रमेय को सिद्ध करता है यदि श्रम तथा पूंजी को उनके सीमांत उत्पादन के अनुसार भुगतान किया जाता है तो कुल उत्पादन साधन भुगतान के ही बराबर होगा।

4) सी0 ई0 एस0 उत्पादन फलन के सम उत्पाद वक्र मूल बिन्दु की ओर उन्नतोदर होगें।

परन्तु सी0 ई0 एस0 उत्पादन फलन में भी खामियाँ हैं जिसमें सबसे प्रमुख खामी यह है कि यह फलन भी उत्पादन के मात्र दो साधनों पर ही आधारित है तथा इसका प्रयोग मात्र एक ही फर्म तक सीमित है लेकिन इन सबके बावजूद भी यह महत्वपूर्ण उत्पादन फलन है।

13.13 सारांश

समांगी उत्पादन फलन के वतर्मान इकाई में व्यापक मध्यमान के पश्चात यह कहा जा सकता है कि इन उत्पादन फलनों के अध्ययन ने अर्थशास्त्र विषय को एक नया आयाम तथा दिशा प्रदान की जिसके अध्ययन के लिये धीरे-धीरे गणितीय अर्थशास्त्र की शाखा विकसित होकर एक महत्वपूर्ण स्वरूप ले चुकी है। चूंकि समांग उत्पालन फलनों का स्वरूप काफी व्यापक है अतः इनका प्रयोग अर्थशास्त्र के अनेकों क्षेत्रों कृषि उद्योग विनिर्माण आदि में किया जा सकता है साथ ही वितरण तथा आर्थिक विकास के क्षेत्र में भी महत्वपूर्ण निष्कर्ष दिये जा सकते है। यद्यपि समांगी उत्पादन फलनों की भी अपनी सीमाए तथा खामियाँ है परन्तु इन सबके बावजूद समांगी उत्पादन फलनों की अपनी ही अलग विशेषतायें है जिनके कारण से इनका व्यापक उपयोग किया जाता है तथा इन फलनों का अर्थशास्त्र के मौलिक अध्ययन में योगदान महत्वपूर्ण है।

13.14 शब्दावली

- **प्रतिस्थापन लोच -** सीमांत प्रतिस्थापन की तकनीकी दर में सापेक्षिक परिवर्तन होने के कारण से साधन अनुपात में कितना सापेक्षिक परिवर्तन होता है प्रतिस्थापन लोच के रूप में जाना जाता है। जबकि उत्पादन का स्तर समान रहें।
- **समउत्पाद वक्र -** इस वक्र अनरूप का स्तर समान रहता है। उसे समान उत्पाद वक्र भी कहते है। यह समान उत्पादन का वह बिन्दु पथ है जिसे श्रम तथा पूंजी की विभिन्न मात्राओं से प्राप्त किया जा सकता है।
- **सीमांत प्रतिस्थापन की तकनीकी दर** – श्रम की एक इकाई के बदले पूंजी की किसी इकाईयाँ प्रतिस्थापित की जा सकती है जबकि उत्पादन की स्तर समान बना रहें।

$$\mathrm{MRTS_L} = \frac{\Delta \mathrm{K}}{\Delta \mathrm{L}} = \frac{\mathrm{MP_L}}{\mathrm{MP_K}}$$

- **उत्पाद रेखायें** – उत्पादन में विस्तार को इनके माध्यम से निरूपित किया जाता है।
- **समलागत रेखा** – यह उत्पादन के साधनों के विभिन्न अनुपातों को प्रदर्शित करती है जिसे कोई फर्म दिये गये बजट में से क्रय कर सकती है इसे क्रय रेखा या कीमत रेखा भी कहते है।

  $C = wL + rK$
- **सीमान्त उत्पादन** – उत्पादन के साधनों में इकाई परिवर्तन होने से कुल उत्पादन में कितना परिवर्तन होता है यह सीमांत उत्पादन कहलाता है।
- **औसत उत्पादन** – कुल उत्पादन तथा साधनों के अनुपात को औसत उत्पादन कहते है।
- **इष्टतम् उत्पादन** – इसे उत्पादन करने वाली फर्म का संतुलन बिन्दु भी कहते है तथा इसका निर्धारण समउत्पाद वक्र तथा समलागत रेखा के स्पर्श बिन्दु के द्वारा होता है।
- **विस्तार पथ** – न्यूनतम लागत उत्पादन के संयोग बिन्दुओं को मिलाने पर विस्तार पथ प्राप्त होता है।
- **फलन** – दो चरों के मध्य सम्बन्ध व्यक्त करता है।
- **अवकलन गुणांक -** जब y का X के सापेक्ष अवकलन किया जाता है तो dy /dX, y का X के सापेक्ष अवकलन गुणांक होगा।

13.15 लघु उत्तरीय प्रश्न

1. उत्पादन फलन क्या मौद्रिक मूल्यों पर निर्धारित करता है?
2. उत्पादन फलन स्थैतिक अर्थशास्त्र का विषय है क्या यह कथन सत्य है?
3. पैमाने के प्रतिफल में उत्पादन के कितने साधन गतिशील होते है?
4. रेखीय रूप से समांगी उत्पादन फलन कितने कोटि का होता है?
5. यदि आगतो को दुगना करने पर निर्गत भी दुगना हो जाये तो उत्पादन फलन की कोटि होगी।
6. यदि आगतो को दुगना करने पर निर्गत चार गुना हो जाये तो उत्पादन फलन की कोटि होगी।
7. यदि आगतो को दुगना करने पर निर्गत दुगने से कम बढ़े तो उत्पादन फलन की कोटि होगी।
8. रेखीय रूप से समांगी या समरूप उत्पादन फलन की कोटि कितने अंश की होती है?
9. पैमाने के प्रतिफल रूपी उत्पादन फलन किस काल में लागू होते है?
10. समांगी उत्पादन फलन को किस रूप में लिखा जा सकता है?
11. यदि उत्पादन के सभी साधन परिवर्तनशील है तो उत्पाद रेखायें कहाँ से गुजरती है?
12. समांगी उत्पादन फलन में उत्पाद रेखायें कैसी होती है?
13. यदि उत्पादन फलन समांगी नहीं है तो उत्पाद रेखायें कैसी होगी?
14. रेखीय रूप से समांगी उत्पादन फलन में समउत्पाद वक्रों के मध्य दूरी हमेशा ___ कैसी बनी रहती है?
15. कॉब डगलस उत्पादन फलन की लोच होगी?

उत्तर - 1. नहीं 2. सत्य 3. सभी 4. एक 5. एक

6. दो 7. एक से कम 8. एक 9. दीर्घ काल 10. $Q = m^K f(x, y)$

11. मूल बिन्दु 12. सीधी रेखा में 13. टेड़ी-मेड़ी 14. बराबर 15. एक

13.16 सन्दर्भ ग्रन्थ सूची

- मिश्र, जयप्रकाश (2005) कृषि अर्थशास्त्र, साहित्य भवन प्रकाशन।

- आहूजा, एच0 एस0 (2002) समष्टि अर्थशास्त्र, एसद्ध चन्द प्रकाशन।
- Mehta Mandnani (2001). Mathematics Economics Sultan chand Publication.
- Bose, D. (2003), An Inrtoduction to mathematical Economics, Himalaya Publishing House.
- Bhardwaj, R.S. (2000). Mathematics for Economics and Businese, Excel Books.

13.17 दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

1. उत्पादन फलन की मान्यतायें लिखते हुये समांगी उत्पादन फलन की विशेषतायें चित्र सहित बताईयें?
2. क्या $Q = A\, L^{\propto} K^{1-\propto} n$ फलन समांगी है यदि है तो इस फलन की कोटि बताईयें?
3. क्या $Q = L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}$ फलन समांगी है यदि है तो इसकी कोटि बताईयें?
4. समांगी उत्पादन फलन को गणितीय रूप में समझाते हुये आयलर प्रमेय को सिद्ध कीजियें?

इकाई 14 कॉबडगलस उत्पादन फलन
(Cobb-Douglas Production Function)

14.1 प्रस्तावना

पूर्व की इकाई में उत्पादन फलनों एवं विशेष तौर पर संगमी उत्पादन फलन तथा उसकी विशेषताओं का अध्ययन किया गया है। संगामी उत्पादन फलन तथा इसकी विशेषताओं का अर्थशास्त्र के अध्ययन में महत्वपूर्ण भूमिका है। उत्पादन फलनों के अगले चरण में महत्वपूर्ण उत्पादन फलन, " कॉब डगलस' का अध्ययन वर्तमान इकाई में किया जायेगा।

कॉब डगलस उत्पादन फलन का निर्माण सुप्रसिद्ध अमेरिकी अर्थशास्त्री प्रो0 सी0 डब्लू० कॉब एवं प्रो0 सी0 एच0 डगलस द्वारा किया गया। यद्यपि इस उत्पादन फलन को सर्वप्रथम केनेट विकसैल(1851-1926) ने प्रस्तावित किया परन्तु साख्यिकीय पद्धति से परीक्षण तथा विकास चार्ल्स कॉब तथा पाल डगलस द्वारा 1928 में किया गया। इस उत्पादन फलन के अन्तर्गत दोनों अर्थशास्त्रियों द्वारा उत्पादन के ऊपर श्रम तथा पूंजी के प्रभाव को ज्ञात करने हेतु एक अत्याधिक महत्वपूर्ण सूत्र का अविष्कार किया जिससे उत्पादन का श्रम तथा पूंजी के साथ सम्बन्ध स्थापित हो सके।

दोनों अर्थशास्त्रियों द्वारा अमेरिकी अर्थशास्त्रियों द्वारा अमेरिकी अमेरिकी अर्थव्यवस्था के सन्दर्भ में 1899–1922 तक के ऑकड़ों के आधार पर एक अध्ययन प्रकाशित किया गया । जिसके माध्यम से दोनों अर्थशास्त्रियों द्वारा कॉब डगलस उत्पादन फलन को स्थापित किया गया है।

कॉब डगलस उत्पादन फलन न सिर्फ एक महत्वपूर्ण उत्पादन फलन है अपितु यह विशुद्ध तौर पर अर्थशास्त्र में विभिन्न महत्वपूर्ण अध्ययन करने हेतु विशेष तौर पर निर्मित किया गया है। वर्तमान इकाई में कॉब डगलस उत्पादन फलन के बारे में व्यापक अध्ययन किया जायेगा।

14.2 उद्देश्य

इस इकाई में अध्ययन हेतु निम्न उदेदश्य निर्धारित किये गये है :

- ✓ कॉब डगलस उत्पादन फलन क्या है तथा इसकी मुख्य मान्यतायें क्या है?
- ✓ कॉब डगलस उत्पादन फलन की मुख्य विशेषतायें कौन-कौन सी है?
- ✓ कॉब डगलस उत्पादन फलन की मुख्य मान्यतायें क्या है?
- ✓ कॉब डगलस उत्पादन फलन की प्रतिस्थापन लोच किस प्रकार निर्धारित की जाती है?
- ✓ कॉब डगलस उत्पादन फलन का विस्तार पथ कैसा होता है?
- ✓ कॉब डगलस उत्पादन फलन का संशोधित रूप क्या है?
- ✓ कॉब डगलस उत्पादन फलन के क्या उपयोग है?
- ✓ कॉब डगलस उत्पादन फलन की क्या सीमायें तथा आलोचनायें है?

14.3 कॉब डगलस उत्पादन फलन

प्रो0 कॉब तथा प्रो0 डगलस द्वारा इस उत्पादन फलन का सूत्र निम्न रूप में स्थापित किया गया,

$$Q = A\,L^{\propto}K^{\beta}$$

जहाँ Q = उत्पादन की मात्रा। L = श्रम। K = पूंजी एवं $\propto, \beta$ एवं A धनात्मक स्थिरांक है। $\propto$ जहां उत्पादन की श्रम के सापेक्ष लोच है, तथा β उत्पादन की पूंजी के सापेक्ष लोच है। जबकि A गुणांक उत्पादन के साधनों के संगठन की

दक्षता को मापने में सहायक होता है। अधिक दक्ष उत्पादन ईकाई का A अधिक बड़ा होगा। A को कुल साधन उत्पादकता भी कहते हैं।

$$A = \frac{Q}{L^{\alpha}K^{\beta}}$$

चूँकि उपरोक्त समीकरण का हर साधनों का गुणोतर माध्य है। अतः A वास्तविक उत्पादन प्रति इकाई इनपुट यानि साधन के है।

कॉब डगलस उत्पादन फलन कुछ निश्चित मान्यताओं के साथ ही कार्य करता है जोकि निम्नवत् है

1. उत्पादन के केवल दो ही उपादान है, पूंजी तथा श्रम ।
2. श्रमिकों की उत्पादन क्षमता दिये हुये समय में स्थिर है।
3. पूंजीगत पदार्थो की उत्पादन क्षमता दिये हुये समय में स्थिर है।
4. अन्य कारक जैसे तकनीकी प्रगति, पूंजी में हास आदि भी स्थिर है।
5. कॉब डगलस उत्पादन फलन को मूलतया $\propto + \beta = 1$ यानि पैमाने के स्थिर प्रतिफल हेतु निर्धारित किया गया है। इसके अतिरिक्त इस फलन की निम्न दो और महत्वपूर्ण मान्यतायें हैं।
   (क) उत्पादन फलन में श्रम के सापेक्ष सीमांत उत्पादकता प्रति श्रमिक ईकाई उत्पादन के समानुपाती होग।
   (ख) उत्पादन फलन में पूंजी के सापेक्ष सीमांत उत्पादकता प्रति पूंजी ईकाई उत्पादन के समानुपाती होग।
   अंतिम दो मान्यताओं के माध्यम से कॉब डगलस उत्पादन फलन को हल किया जा सकता है। जहाँ उत्पादन (Q) का श्रम के सापेक्ष आंशिक अवकलन $\frac{\partial Q}{\partial L}$ श्रम के साथ सीमांत उत्पादन होगा तथा उत्पादन (Q) का पूंजी के सापेक्ष आंशिक अवकलन $\frac{\partial Q}{\partial K}$ पूंजी के साथ सीमांत उत्पादन होग।

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \alpha \frac{Q}{L} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(a)}$$

जहाँ $\frac{Q}{L}$ प्रति श्रमिक औसत उत्पादन है तथा $\propto$ एक स्थिर राशि हैं। उत्पादन (Q) श्रम तथा पूंजी (L,K) का फलन है। यदि पूंजी की मात्रा स्थिर (K_o) रखी जाये तो

$$Q = f(L, K_0) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(b)}$$

समीकरण (a) को K को स्थिर होने पर सरल अवकलन समीकरण के रूप में निम्न रूप में लिखा जा सकता है।

$$\frac{dQ}{dL} = \alpha \frac{Q}{L}$$

यानि

$$\frac{dQ}{Q} = \alpha \frac{dL}{L} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(c)}$$

दोनों ओर समाकलनन करने पर

$$\int \frac{1}{Q} dQ = \alpha \int \frac{1}{L} dL$$

$$\ln(Q) = \alpha \ln(cL)$$

$$\ln(Q) = \ln(cL^{\alpha})$$

अंततः $f(L, K_0) = c_{1(K_0)}\, L^{\alpha}$ ....(d)

जहाँ $C_1(K_0)$ समाकलनन का स्थिराँक है तथा इसे K_0 के फलन के रूप में व्यक्त कर सकते है।

इसी प्रकार मान्यता (ख) से $\frac{\partial Q}{\partial K} = \beta \frac{Q}{K}$

L = L_0 यानि L को स्थिर रखकर उपरोक्त समीकरण को अवकलन समीकरण के रूप में हल किया जा सकता है। जिससे निम्न समीकरण प्राप्त होगें।

$f(L_0 K) = c_2(L_0)K^{\beta}$ ....(e)

समीकरण (d) तथा (e)

$f(L, K) = AL^{\alpha}K^{\beta}$ ....(f)

जहाँ A एक स्थिर राशि है जो कि श्रम तथा पूंजी दोनों से स्वतंत्र है तथा $\propto$ एवं β दोनों के मान शून्य से अधिक होगे।

14.4 कॉबडगलस उत्पादन फलन की विशेषतायें

कॉब डगलस उत्पादन फलन अपनी खास विशेषताओं के कारण अर्थशास्त्र में उत्पादन सम्बन्धी विभिन्न क्षेत्रों जैसे कृषि, विनिर्माण तथा उद्योग जैसे के अध्ययन में अहम् भूमिका निभाता है जो कि निम्नवत्

- यह $(\propto + \beta)$ डिग्री का समरूप या संमागे उत्पादन फलन है जो कि $(\propto + \beta) = 1$, की स्थिति में रेखीय रूप से समरूप उत्पादन फलन हो जाता है। इसको निम्न रूप से सिद्ध किया जा सकता है।

$Q = A\, L^{\propto}K^{\beta}$ या $Q = A\, L^{\propto}K^{1-\propto}$

यदि श्रम तथा पूंजी में m गुना वृद्धि की जाये तो,

$$Q_1 = A\, (mL)^{\propto}(mK)^{\beta}$$
$$Q_1 = A\, (m^{\propto}L^{\propto}m^{\beta}K^{\beta}$$
$$Q_1 = A\, m^{\propto+\beta}L^{\propto}K^{\beta}$$
$$Q_1 = m^{\propto+\beta}\, Q$$

यानि उत्पादन के साधनों में m गुना वृद्धि करने पर कुल उत्पादन $m^{\propto+\beta}$ गुना बढ़ जाता है। एवं यदि $(\propto + \beta = 1$, तो $Q1 = m_Q$

इस विशेष परिस्थिति में कॉब डगलस उत्पादन फलन रेखीय रूप से समरूप उत्पादन फलन की तरह कार्य करेग जिसमें यदि साधनों में जितने गुना की वृद्धि की जायें उत्पादन भी उतने ही गुना वृद्धि करता है। यदि श्रम तथा पूंजी को दुगना किया जाता है तो उत्पादन भी दुगना हो जाता है।

इसके समउत्पाद वक्र का ढाल ऋणात्मक होता है तथा इस तथ्य को साबित करने हेतु प्रथम तथा द्वितीय कोटि का अवकलन करना होगा।

$$Q = A\, L^{\propto}K^{\beta}$$

चूंकि कुल अवकलन

$$dQ = \frac{dQ}{dL}dL + \frac{dQ}{dk}dK \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

चूंकि

$$dQ = A \propto L^{\propto-1} K^{\beta} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{dQ}{dL} = A\,\beta\, L^{\alpha}\, K^{\beta-1} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .. (3)$$

समीकरण (2) तथा (3) का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$dQ = \left(A \propto L^{\propto-1} K^{\beta}\right)dL + \left(A\beta\, L^{\alpha}K^{\beta-1}\right)dK$$

चूंकि समउत्पाद वक्र पर कुल उत्पादन स्थिर रहता है। इसलिये $dQ = 0$

अतः

$$\left(A\,\alpha\, L^{\alpha-1}\, K^{\beta}\right)dL + A\,\beta\, L^{\alpha}K^{\beta-1})dK = 0$$

इसलिये $\frac{d^2K}{dL^2} = -(\frac{\alpha}{\beta} . \frac{K}{L}$

अतः चूँकि $\frac{dK}{dL}$ का मान ऋणात्मक है अतः समउत्पाद वक्र का ढाल ऋणात्मक होगा।

चूँकि $\frac{dK}{dL}$ का चिन्ह ऋणात्मक है अत: $\frac{d^2K}{dL^2}$ का मान धनात्मक ही आयेग क्योंकि α, β, L और K का मान हमेशा धनात्मक ही होता है। अतः समउत्पाद वक्र का ढाल ऋणात्मक होने के साथ-साथ मूल बिन्दु की ओर उत्तालाकार होग। यानि मूल बिन्दु की ओर उन्नोतदर (Convex to Origin) होग। श्रम उत्पादन की श्रम के सापेक्ष लोच α तथा पूंजी के सापेक्ष β होगी।

उत्पादन की श्रम के सापेक्ष लोच $e_L = \frac{L}{Q}\frac{\partial Q}{\partial L} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . (4)$

$\frac{\partial Q}{\partial L} = A\,\alpha\, L^{\alpha-1}K^{\beta}$ एवं $Q = A\, L^{\alpha}K^{\beta}$

का मान (4) में रखने पर

$$e_L = \frac{L\, A\,\alpha\, L^{\alpha-1}K^{\beta}}{A\, L^{\alpha}K^{\beta}}$$

$$e_L = \alpha$$

इसी प्रकार पूंजी के सापेक्ष उत्पादन की लोच $\mathrm{e_K} = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{Q}}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{K}} \dots\dots\dots\dots\dots . (5)$

समीकरण (5) में $Q = A\, \mathrm{L}^{\propto}\, \mathrm{K}^{\beta}$ तथा $\frac{\partial Q}{\partial K} A\, \beta L^{\alpha}\, K^{\beta-1}$ का मान रखने पर

$$e_K = \frac{K\ \beta A\ L^{\propto} K^{\beta-1}}{A\ L^{\propto} K^{\beta}}$$
$$e_K = \beta$$

अतः α तथा β उत्पादन की क्रमशः श्रम तथा पूंजी के सापेक्ष लोच है। कॉब डगलस उत्पादन फलन में $(\frac{\alpha}{\beta})$ अनुपात साधन गहनता का निर्धारण करता है अधिक $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ अनुपात का मान होने पर उत्पादन फलन की तकनीक श्रम गहन होती है तथा अनुपात कम होने पर तकनीक अधिक पूंजी गहन होती है। कॉब डगलस उत्पादन फलन के सीमांत तथा औसत उत्पादकता का निर्धारण निम्न तरह से किया जा सकता हैं।

$\frac{\partial Q}{\partial K} = MP_K =$ पूंजी की सीमांत उत्पादकता $= A\,\beta\ L^{\propto} K^{\beta-1}$

औसत उत्पादकता = $A\ P_K = \frac{Q}{K} = \frac{A\ L^{\propto} K^{\beta}}{K}$

$$A\ P_K = A\ \ L^{\propto} K^{\beta-1}$$

अतः $MP_K = \beta\,(A\ \ P_K)$

इसी प्रकार $MP_L = \alpha\,(A\ \ P_L)$

कॉब डगलस उत्पादन फलन के अनुसार यदि उत्पादन के प्रत्येक साधन को सीमांत उत्पादकता के बराबर भुगतान किया जाये तो कुल उत्पादन का वितरण श्रम तथा पुंजी के भुगतान में ही समाप्त हो जाता है।

चूँकि $MP_L = \alpha\,(A\ \ P_L) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(6)$

तथा $A\ P_L = \frac{Q}{L}$ का मान समीकरण (6) में रखने पर $MP_L = \frac{\alpha Q}{L}$यदि L श्रमिक है तो श्रमिकों को मिलने वाला कुल भुगतान $MP_L.\,L = \frac{\propto \cdot Q}{L}.\,L = \alpha \cdot Q$

इसी प्रकार पूंजी को प्राप्त होने वाला भुगतान भी निर्धारित किया जा सकता है।

$MP_K = \beta\ (A\ P_K = \frac{Q}{K}\beta$

पूँजी का भुगतान $c\ = \frac{Q}{K}\beta$

$$K\ = \beta.\,Q$$

अतः कुल भुगतान

$$\alpha.\,Q + \beta.\,Q$$
$$Q(\alpha + \beta)$$

चूंकि $(\alpha + \beta) = 1$अतः कुल भूगतान = Q

जो कि कुल उत्पादन के समान है। यदि देखा जाये तो कॉब डगलस उत्पादन फलन वितरण पर आयलर प्रमेय की

व्यवहारिकता को सिद्ध करता है। आयलर प्रमेय के अनुसार संमाग उत्पादन फलन को हमेशा निम्न रूप में लिखा जा सकता है। यदि Z = f (x y)

तो $Z = x.\frac{\partial z}{\partial x} + y.\frac{\partial z}{\partial y}$

इसी प्रकार से कॉब डगलस उत्पादन फलन को भी व्यक्त किया जा सकता है।

$$Q_1 = \mathrm{f}\,(\mathrm{L}, \mathrm{K}) = \mathrm{A}\,\mathrm{L}^{\propto}\mathrm{K}^{\beta}$$

$$Q_1 = \mathrm{L}.\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{L}} + \mathrm{K}.\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{K}}$$

$$Q = \mathrm{L}.\mathrm{MP_L} + \mathrm{K}.\mathrm{MP_K} = \mathrm{Q_1}$$

अतः कॉब डगलस उत्पादन फलन आयलर प्रमेय को सिद्ध करता है।

कॉब डगलस उत्पादन फलन की सीमांत उत्पादकताये हमेशा धनात्मक होती है तथा सीमांत उत्पादकताओं में परिवर्तन की दर ऋणात्मक होती है।

$$Q = A\,\mathrm{L}^{\propto}\,\mathrm{K}^{\beta}$$

$$\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{L}} = \propto \mathrm{A}\,\mathrm{L}^{\propto -1}\mathrm{K}^{\beta}$$

$$\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{L}} = \frac{\propto \mathrm{Q}}{\mathrm{L}}$$

चूँकि α, Q तथा L तीनों धनात्मक होते है अतः $\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{L}} > 0$ होगा। इसी प्रकार $\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{K}} > 0$ होगा।

यानि हमेशा ही $\mathrm{MP_L}$ तथा $\mathrm{MP_K}$ का मान धनात्मक होगा।

$\frac{\partial Q}{\partial L}$ का पुनः अवकलन करने पर

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)AL^{\alpha-2}K^{\beta}}{L^2} = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)AL^{\alpha}K^{\beta}}{L^2} \quad (\text{L}^2 \text{ से गुणा करने पर})$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{L^2}\,Q$$

चूँकि $0 < \propto < 1$, अतः $(\alpha - 1)$ हमेशा ऋणात्मक होगा।

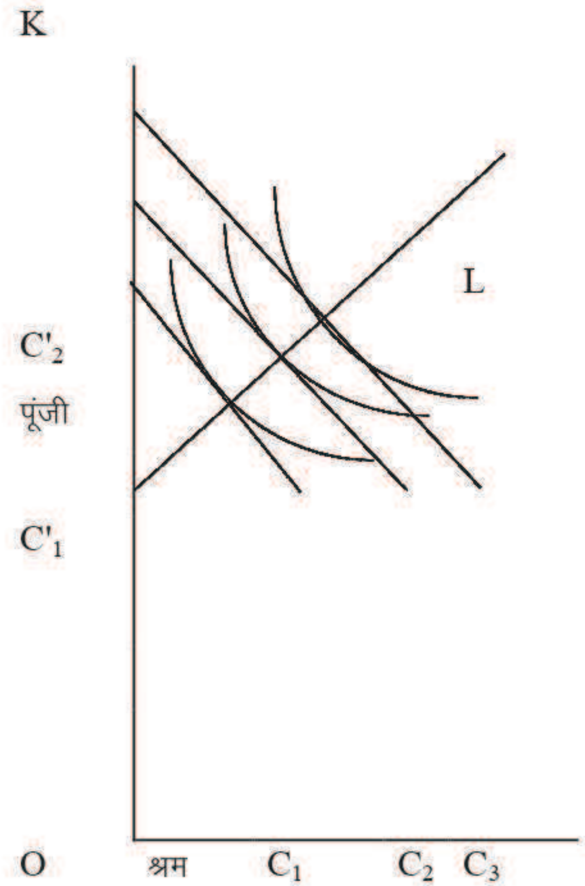
इसलिये $\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2}$ का मान भी हमेशा ऋणात्मक होगा।

इसी प्रकार $\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2}$ का मान भी सदैव ऋणात्मक होगा।

14.5 कॉब डगलस उत्पादन फलन का विस्तार पथ

कॉब डगलस उत्पादन फलन के समउत्पाद वक्रों तथा समलागत रेखाओं के स्पर्श बिन्दुओं का बिन्दु पथ इस फलन का विस्तार पथ है। यह बिन्दु पथ उस इष्टतम् उत्पादन के बिन्दुओं को प्रदर्शित करता है जिसे दी हुयी न्यूनतम लागत

दशाओं पर प्राप्त किया जा सकता है। यानि यह उत्पादन के विभिन्न संतुलन बिन्दुओं को विभिन्न लागत उत्पादन दशाओं के अनुरूप प्रदर्शित करता है। इन बिन्दुओं पर समउत्पाद रेखाओं का ढाल समलागत रेखाओं के बराबर होता है। अतः यह सिद्ध जा सकता है कि रेखीय रूप से समरूप कॉब डगलस उत्पादन फलन का विस्तार पथ एक सीधी रेखा में होता है। इस विस्तार पथ को चित्र के माध्यम से भी निरूपित किया जा सकता है।



जहाँ q_1, q_2, q_3 समउत्पाद वक्र हैं तथा $c_1\ c_1'$, $c_2\ c_2'$, $c_3\ c_3'$ समलागत रेखायें। बिन्दु $c_1\, c_2$ तथा c_3 पर सम उत्पाद वक्र एवं समलागत रेखायें एक दूसरे को स्पर्श करती हैं तथा दोनों के ढाल इन बिन्दुओं पर समान है। अतः OL रेखा कॉब डगलस उत्पादन फलन के विस्तार पथ को प्रदर्शित करती हैं। इस विस्तार पथ को गणतीय रूप से भी किया जा सकता है।

समलागत रेखा $c = wL + \gamma K \ldots\ldots\ldots\ldots..(7)$

इस रेखा का ढाल - $\frac{w}{r}$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(8)$

W जहाँ श्रम की कीमत तथा γ पुंजी की कीमत है जिन्हें स्थिर माना गया है। समउत्पाद वक्र का ढाल

$$\frac{\partial K}{\partial L} = \frac{MP_L}{MP_K}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

समीकरण (7) तथा (8) से

$$\frac{MP_L}{MP_K} = \frac{w}{r} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (10)$$

$MP_L = A\,\alpha\, L^{\alpha-1}K^{\beta}$ तथा $MP_K = A\,\beta\, L^{\alpha}K^{\beta-1}$ का मान (4) में रखने पर

$$\frac{w}{r} = \frac{A \propto L^{\propto-1}K^{\beta}}{A\,\beta L^{\propto}K^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta}.\frac{K}{L}$$

$$\frac{L}{K} = \frac{\beta}{\propto}.\frac{w}{r} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (11)$$

रेखीय रूप से समरूप कॉब डगलस उत्पादन फलन हेतु $\alpha + \beta = 1$ यानि $\beta = 1 - \alpha$ का मान समीकरण (4) में रखने पर

$$\frac{L}{K} = \frac{1-\alpha}{\alpha}.\frac{w}{r} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. (12)$$

जो कि एक स्थिर राशि है। अतः रेखीय रूप से समरूप कॉब डगलस उत्पादन फलन का विस्तार पथ एक सीधी रेखा में होगा। इसी प्रकार यह भी साबित किया जा सकता है कि इस फलन का विस्तार पथ एक सीधी रेखा में होगा। चाहे यह फलन रेखीय रूप से समरूप हो या न हो।

14.6 प्रतिस्थापन की लोच

कॉब डगलस उत्पादन फलन में उत्पादन के साधनों के मध्य प्रतिस्थापन की लोच निम्न सूत्र के द्वारा व्यक्त की जाती है

$$\text{प्रतिस्थापन की लोच } (e_s) = \frac{\text{साधन अनुपात}(L/K) \text{ में अनुपातिक परिवर्तन}}{\text{सीमांत प्रतिस्थापन की तकनीकी दर में आनुपातिक परिवर्तन}}$$

$$e_s = \frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{\left(\frac{K}{L}\right)} \Big/ \frac{d(\mathrm{MRTS_L})}{MRTS}$$

$$e_s = \frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{\left(\frac{K}{L}\right)}.\frac{(MRTS)}{d(MRTS)}$$

$$e_s = \frac{d\left[\log\left(\frac{K}{L}\right)\right]}{d[\log(MRTS)]} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (13)$$

$$\text{चूँकि } MRTS = \frac{\mathrm{MP_L}}{\mathrm{MP_K}} = \frac{A\,\alpha L^{\alpha-1}K^{\beta}}{A\,\beta L^{\alpha}K^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{K}{L}$$

MRTS का मान समीकरण (13) में रखने पर

$$e_s = \frac{d\left[\log\left(\frac{K}{L}\right)\right]}{d\left[\log\left(\frac{\propto}{\beta}\cdot\frac{K}{L}\right)\right]}$$

$$e_s = \frac{\left(\frac{L}{K}\right).\,d\left(\frac{K}{L}\right)}{\left(\frac{\beta}{\propto}\cdot\frac{L}{K}\right).\,d\left(\frac{\propto}{\beta}\cdot\frac{K}{L}\right)}$$

$$e_s = 1$$

अतःकॉब डगलस उत्पादन फलन की प्रतिस्थापन की लोच 1 होती है।

14.7 संशोधित कॉब डगलस उत्पादन फलन

$$Q = A\,L^{\alpha}K^{\beta}$$

जहाँ $\beta = 1-\alpha$के अन्तर्गत केवल स्थिर पैमाने प्रतिफल का अध्ययन हो सकता है। जबकि अर्थशास्त्र में ह्रासमान तथा वृद्धिमान फलों का अध्ययन भी किया जाता है। अतः यदि कॉब डगलस उत्पादन फलन में $\alpha+\beta$ मान को एक से अधिक रखकर वृद्धिमान प्रतिफलों को प्राप्त किया जा सकता है तथा $\alpha+\beta$ के मान को एक से कम रखकर ह्रासमान प्रतिफल को प्राप्त किया जा सकता है।

यदि $\alpha+\beta = 2$ तो अगर उत्पादन के साधनों को दुगना करने पर

$$Q_1 = A\,(2L)^{\alpha}\,(2K)^{\beta}$$

$$Q_1 = 2^{\alpha+\beta}\,A\,L^{\alpha}K^{\beta}$$

$$Q_1 = 2^{\alpha+\beta}Q \quad \text{चूंकि } \alpha+\beta = 2$$

अतः $Q_1 = 4Q$ यानि उत्पादन में चार गुना वृद्धि होग। इसी प्रकार $\alpha+\beta$ के मान को एक से अधिक या कम रखकर हर स्थिति के लिये संशोधित किया जा सकता है।

यदि $\alpha+\beta = -1$ तो उत्पादन के साधनों को दुगना करने पर

$$Q_1 = 2^{\alpha+\beta}Q$$

$$Q_1 = 2^{-1}Q$$

$Q_1 = \frac{Q}{2}$ यानि उत्पादन में आधे गुना ही वृद्धि होगी।

14.8 कॉब डगलस उत्पादन फलन एवं पैमाने के प्रतिफल

पैमाने के प्रतिफल उत्पादन फलन की दीर्घ कालीन प्रवृति को प्रर्दशित करते है। दीर्घकाल में पैमान के सभी साधन

परिवर्तनशील होते है। साधनों में होने वाले परिवर्तनों के कारण से पैमाने पर मिलने वाले प्रतिफलों में भी परिवर्तन आता है तथा यह प्रतिफल बढ़ते हुये, घटते हुये तथा स्थिर प्रकार के हो सकते है। जिन्हें समांगी उत्पादन फलन अनुसार निम्न प्रकार से समझाया जा सकता है :

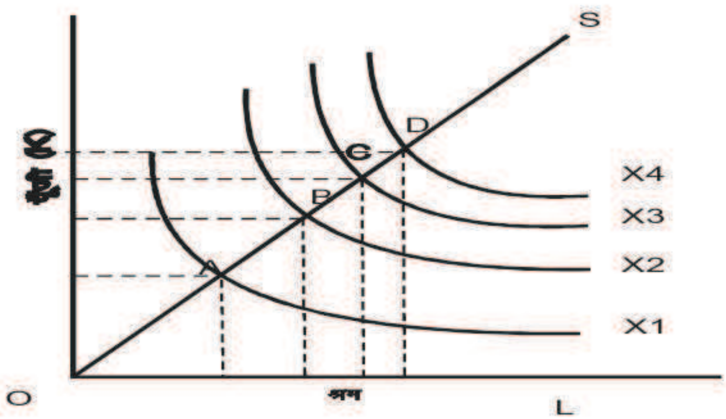
(अ) पैमाने के वर्द्धमान प्रतिफल

यदि उत्पत्ति के साधनों में एक निश्चित अनुपात में वृद्धि की जाती है परन्तु इसके कारण से मिलने वाला प्रतिफल में वृद्धि अधिक अनुपात में हो जाती है तो यह बढ़ते हुये या वर्द्धमान प्रतिफल कहलायेग यानि

उत्पादन में अनुपातिक वृद्धि $>$ साधनों की मात्रा में अनुपातिक वृद्धि

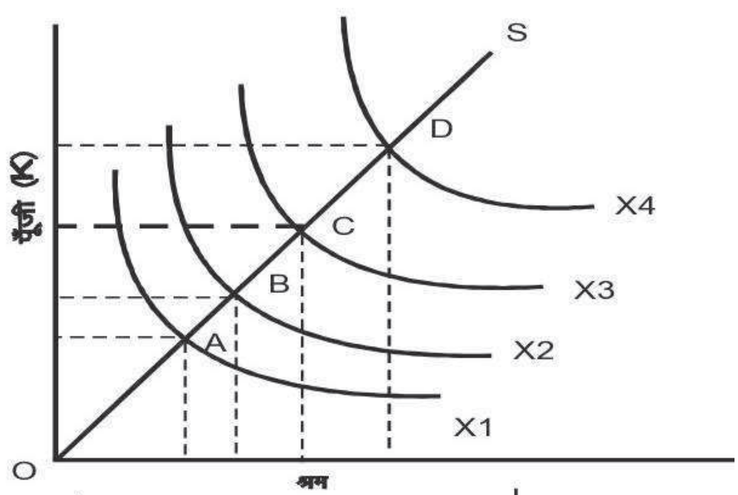
अतः यदि उत्पादन के साधनों में 20 प्रतिशत अनुपात से वृद्धि की जाये तो उत्पादन में वृद्धि 20 प्रतिशत से अधिक हो जाती है तो यह वर्द्धमान प्रतिफल का उदाहरण होगा। चित्र में OS रेखा पैमाने को निरूपित करती है तथा X1,X2, X3, X4 उत्पादन की क्रमशः 100, 200, 300, 400 ईकाई को निरूपित करते है। अतः स्पष्ट है कि उत्पादन में समान वृद्धि करने हेतु उत्पत्ति के साधनों में वृद्धि का अनुपात कम होता जायेग तथा सम उत्पाद वक्रों के मध्य दूरी निरतंर घटती जायेगी। यानि $AB > BC > CD$ जो कि वर्द्धमान प्रतिफल को निरूपित करता है। यानि $\alpha + \beta > 1$

-



(ब) पैमाने का हासमान प्रतिफल

इसके अनुसार उत्पत्ति के साधनों को जिस अनुपात में बढाया जाता है उसकी तुलना में उत्पादन में वृद्धि कम अनुपात में होती है तथा –X1, X2, X3, तथा X4 समउत्पाद वक्रों के मध्य दूरी निरंतर बढती जाती है।



A

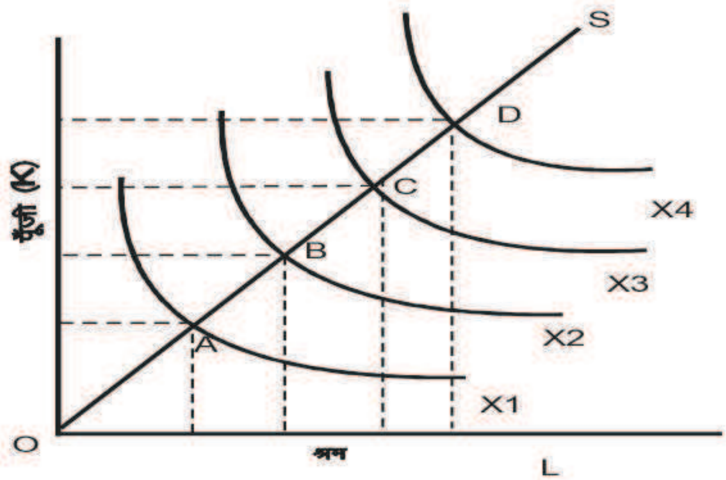
$AB < BC < CD$

इस उत्पादन प्रक्रिया में उत्पादन में समान वृद्धि अर्थात 100 ईकाई के लिये बढ़ते हुये साधनों की आवश्यकता पड़ेग। यानि $\alpha + \beta < 1$ चित्र में OS रेखा पैमाने को निरूपित करती है तथा XI, X2, X3, X4 उत्पादन की क्रमशः 100, 200, 300, 400 ईकाई को निरूपित करते है। अतः स्पष्ट है कि उत्पादन में समान वृद्धि करने हेतु उत्पत्ति के साधनों में वृद्धि का अनुपात बढता जायेग तथा सम उत्पाद वक्रों के मध्य दूरी निरतंर बढती जायेगी।

(स) पैमाने के स्थिर प्रतिफल

इस नियम के अनुसार यदि उत्पत्ति के समस्त साधनों को एक निश्चित अनुपात में बढ़ाया जाये तो उत्पादन भी उसी निश्चित अनुपात में बढ़ता है। सम उत्पाद वक्रों के मध्य दूरी समान बनी रहेंगे तथा उत्पादन में प्रत्येक 100 ईकाई की वृद्धि में उत्पत्ति के समान साधनों की आवश्यकता होगी।

यानि $AB = BC = CD$



चित्र में OS रेखा पैमाने को निर्रूपित करती है तथा X1,X2, X3, X4 उत्पादन की क्रमशः 100, 200, 300, 400 ईकाई को निरूपित करते है। अतः स्पष्ट है कि उत्पादन में समान वृद्धि करने हेतु उत्पत्ति के साधनों में वृद्धि का अनुपात समान ही रहेग तथा सम उत्पाद वक्रों के मध्य दूरी हमेशा समान रहेगी। इस दशा में $\alpha + \beta = 1$ होग।

14.9 कॉब डगलस उत्पादन फलन का उपयोग एवं व्यवहारिकता

कॉब डगलस उत्पादन फलन का अर्थशास्त्र के अध्ययन में बड़ें महत्वपूर्ण उपयोग है जिससे इसकी व्यवहारिकता निर्धारित होती है। यह उत्पादन फलन मात्र उत्पादन के सिद्धान्तों तक ही सीमित नहीं है बल्कि इसका प्रयोग वितरण एवं विकास के क्षेत्र एवं सिद्धान्तों में भी किया जा सकता है। इस उत्पादन फलन के महत्वपूर्ण उपयोग निम्न प्रकार से है। कॉब डगलस उत्पादन फलन का प्रयोग डगलस द्वारा सीमांत उत्पादकता के सिद्धान्त को व्यवहार में सिद्ध करने के लिये किया गया। कॉब डगलस उत्पादन फलन में प्रत्येक साधन को उसकी सीमान्त उत्पादकता के बराबर यदि प्रतिफल दिया जाये तो

$$\text{श्रम का भाग} = \alpha Q$$

$$\text{पूंजी का भाग} = \beta Q = (1 - \alpha)Q$$

क्योंकि $\alpha + \beta = 1$ अतः इससे यह महत्वपूर्ण निष्कर्ष निकालने में मदद मिलती है कि वितरण में श्रम तथा पूंजी की हिस्सेदारी कितनी होग।।

यदि $Q = \mathrm{A}\ \mathrm{L}^{\alpha}\mathrm{K}^{(1-\alpha)}$ में α का मान $\frac{6}{10}$ है। तो कुल उत्पादन का 60 प्रतिशत हिस्सा श्रम को एवं 40 प्रतिशत हिस्सा पूंजी को प्राप्त होना चाहिये।

अतः α तथा β जहाँ उत्पादन की श्रम एवं पूंजी के सापेक्ष लोच है यह$\frac{L}{K}$अनुपात पर निर्भर नहीं करती है। यह तय करती है कि कुल उत्पादन के वितरण में श्रम तथा पूंजी की हिस्सेदारी कितनी होगे। हम उपरोक्त उदाहरण में कितनी भी पूंजी की मात्रा बढाते जाये उसका असर श्रम तथा पूंजी की हिस्सेदारी पर नहीं पड़ेगा।

- कॉब डगलस उत्पादन फलन से आयलर प्रमेय को सिद्ध किया जा सकता है जिससे यह ज्ञात होता है कि कुल उत्पादन को किस प्रकार श्रम तथा पूंजी में विभाजित किया जा सकता है।
- आर्थिक विकास की प्रक्रिया में पूंजी निर्माण का महत्वपूर्ण योगदान है यह उत्पादन की प्रक्रिया में साधनों के उत्पादन पर प्रभाव का मूल्यांकन करता है। इस उत्पादन फलन के निष्कर्षों को कृषि, विनिर्माण, सेवा आदि क्षेत्रों में लागू किया जा सकता है एवं उनका आर्थिक विकास पर पड़ने वाले प्रभावों का अध्ययन किया जा सकता है।
- अर्थशास्त्रियों का एक बड़ा वर्ग इस उत्पादन फलन को सीमित उपयोग एवं कम व्यवहारिक वाला मानता है उनके अनुसार यह मात्र स्थिर पैमाने के प्रतिफल के अनुरूप कार्य करता है।
- इसी तरह यह उत्पादन फलन जो कि मूलतया विनिमार्ण उद्योगों के लिये बनाया गया था कृषि पर लागु नहीं किया जा सकता है क्योंकि गहन कृषि के अन्तर्गत वृद्धिमान प्रतिफल प्राप्त होते है। यद्यपि भारत में कृषि क्षेत्र में किये गये व्यापक अध्ययन से प्रो0 ए0 एम0 खुसरो ने यह प्रमाणित किया कि भारतीय कृषि क्षेत्र में स्थिर पैमाने के प्रतिफल पाये जाते है।
- कॉब डगलस उत्पादन फलन का लौर के माध्यम से रूपान्तरण कर यह लॉग रेखीय (loglinear) रूप में प्राप्त होता है। जिसके माध्यम से इस रूप को अर्थमिति में विशेषतौर पर रेखीय प्रतिग्मन विश्लेषण की सहायता से व्यापक तौर पर उपयोग में लाया जा सकता है। इसके माध्यम से उत्पादन का ऑकलन अधिक सरलता से बेहतर किया जा सकता है। इसे निम्न रूप में समझाया जा सकता है।

$$\mathrm{Q} = \mathrm{AL}^{\alpha}\mathrm{K}^{1-\alpha}$$

दोनो ओर लॉग लेने पर

$$\ln \mathrm{Q} = \ln \mathrm{A} + \alpha \ln \mathrm{L} + (1-\alpha)\ln(\mathrm{K}) \ldots\ldots\ldots\ldots..(14)$$

समीकरण (14) में Q, A, L तथा K में समय के सापेक्ष परिवर्तन का ऑकलन लगया जा सकता है।

चूंकि $d(\ln X) = \frac{dX}{X}$ जिसे X में प्रतिशत परिवर्तन के रूप में समझाया जा सकता है। अतः समीकरण (14) को पुनः निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$$\frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{Q}} = \frac{\mathrm{dA}}{\mathrm{A}} + \alpha\frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{L}} + (1-\alpha)\frac{\mathrm{dK}}{\mathrm{K}} \ldots\ldots\ldots(15)$$

यानि Q में प्रतिशत परिवर्तन = A में प्रतिशत परिवर्तन + α (L में प्रतिशत परिवर्तन) + $(1-\alpha)$(K में प्रतिशत परिवर्तन)

यह सूत्र अधिकांशतया संवृद्धि के लेखाकन के लिये प्रयोग किया जाता है। जिससे यह ज्ञात होता है कि साधनों में प्रतिशत परिवर्तन का प्रभाव कुल उत्पादकता पर कितना प्रतिशत पड़ा है। इसके अतिरिक्त प्रतिगमन रेखाओं तथा प्रतिग्मन समीकरणों से उत्पादन का पूर्वानुमान भी लगाया जा सकता है। इसमें कोई भी सन्देह नहीं है कि इस उत्पादन फलन में खामियों के चलते इसके उपयोग तथा व्यवहारिकता पर एक प्रश्न चिन्ह जरूर कुछ अर्थशास्त्री लगते है परन्तु इसके बावजूद इस उत्पादन फलन के निष्कर्ष अत्याधिक महत्वपूर्ण है जिनका व्यापक, व्यवहारिक एवं महत्वपूर्ण उपयोग किया जाता है।

14.10 कॉब डगलस उत्पादन फलन की आलोचनाये

इस उत्पादन फलन की आलोचना निम्न आधारों पर की गयी है -
कॉब डगलस उत्पादन फलन में उत्पत्ति के मात्र दो साधनों पर चर्चा की गयी है तथा संगठन एवं उद्यमिता को बिल्कुल नजर अन्दाज किया गया है। फलन में श्रम तथा पूंजी की उत्पादन क्षमता को निश्चित तथा स्थिर माना गया है जो कि व्यवहारिकता से परे है। मौलिक कॉब डगलस उत्पादन फलन में मात्र स्थिर पैमाने के प्रतिफलों को ही शामिल किया गया है जबकि वास्तविकता में पैमाने के ह्रासमान तथा वृद्धिमान प्रतिफल भी प्राप्त होते है।

→ यह फलन साधनों की स्थानापन्नता की मान्यता पर आधारित है तथा साधनों की पूरकता को शामिल नहीं करता है। इस फलन में समय तत्व की उपेक्षा की गयी है जबकि आर्थिक चरों का विश्लेषण समय के सापेक्ष किया जाना महत्वपूर्ण होता है। अर्थशास्त्रियों में इस उत्पादन फलन की व्यवहारिकता तथा कार्यशीलता के बारे में आम राय नहीं है। कुछ के अनुसार यह एक फर्म के लिये ही लागू होता है। जबकि कुछ के अनुसार यह फर्मो के समूह के लिये लागू होता है। श्रम की प्रत्येक इकाई को समान ही माना गया है एवं अकुशल श्रम, अर्द्धकुशल श्रम तथा कुशल श्रम में अन्तर स्पष्ट नहीं हो पाया है। कॉब डगलस यह सिद्धान्तया स्पष्ट नहीं कर पाये कि α तथा β क्यों स्थिर रहते है।

14.11 सारांश

कॉब डगलस द्वारा इस उत्पादन फलन का निर्धारण अमेरिकी अर्थव्यवस्था का 1890 से 1922 के मध्य अध्ययन करने के उपरांत किया गया। इसमें कोई संन्देह नहीं है कि इस उत्पादन फलन में व्यापक तथा गंभीर खामियाँ है एवं यह फलन कई अवास्तविक तथा अव्यवहारिक मान्याताओं के आधार पर निर्मित किया गया है जो कि आधुनिक उत्पादन प्रणाली को देखते हुये समुचित नहीं प्रतीत होती है। परन्तु कॉब डगलस द्वारा इस उत्पादन फलन का अविष्कार कर अर्थशास्त्र के अध्ययन में एक नया आयाम जोड़ा है क्योंकि यह उत्पादन फलन ने अर्थशास्त्र के अध्ययन में नींव का काम किया है। चूंकि इसके बाद के समस्त महत्वपूर्ण फलनों का निर्माण कहीं न कहीं कॉब डगलस उत्पादन फलन को ध्यान में रखकर किया गया है। अतः कॉब डगलस उत्पादन फलन की भूमिका अर्थशास्त्र के अध्ययन में बड़ी ही महत्वपूर्ण है।

14.12 शब्दावली

- **प्रतिस्थापन लोच** – सीमांत प्रतिस्थापन की तकनीकी दर में सापेक्षिक परिवर्तन होने के कारण से साधन अनुपात में कितना सापेक्षिक परिवर्तन होता है प्रतिस्थापन लोच के रूप में जाना जाता है। जबकि उत्पादन का स्तर समान रहें।

- **समउत्पाद वक्र -** इस वक्र अनरूप उत्पादन का स्तर समान रहता है। उसे समान उत्पाद वक्र भी कहते है। यह समान उत्पादन का वह बिन्दु पथ है जिसे श्रम तथा पूंजी की विभिन्न मात्राओं से प्राप्त किया जा सकता है।
- **उत्पादन की श्रम लोच** – श्रम की मात्रा में अनुपातिक परिवर्तन से होने वाले उत्पादन में अनुपातिक परिवर्तन के अनुपात को उत्पादन की श्रम के सापेक्ष लोच कहलाती है।
- **उत्पादन की पूंजी लोच** – पूंजी की मात्रा में अनुपातिक परिवर्तन से होने वाले उत्पादन में अनुपातिक परिवर्तन के अनुपात को उत्पाद की पूंजी के सापेक्ष लोच कहलाती है।
- **गुणोत्तर माध्य** – दो राशियों के मध्य का गुणोत्तर माध्य दोनों के गुणन फलों का वर्गमूल होग तथा n राशियों का गुणोत्तर माध्य उन राशियों के गुणनफल का n वाँ मूल होगा।
- **सीमांत प्रतिस्थापन की तकनीकी दर -** श्रम की एक इकाई के बदले पूंजी की किसी इकाईयाँ प्रतिस्थापित की जा सकती है जबकि उत्पादन की स्तर समान बना रहें।

$$MRTS_{LK} = \frac{\Delta K}{\Delta L} = \frac{MP_L}{MP_K}$$

- **समलागत रेखा** – यह उत्पादन के साधनों के विभिन्न अनुपातों को प्रदर्शित करती है जिसे कोई फर्म दिये गये बजट में से क्रय कर सकती है इसे क्रय रेखा या कीमत रेखा भी कहते है। $C = wL + rK$
- **सीमान्त उत्पादन** – उत्पादन के साधनों में ईकाई परिवर्तन होने से कुल उत्पादन में कितना परिवर्तन होता है यह सीमांत उत्पादन कहलाता है।
- **औसत उत्पादन** – कुल उत्पादन तथा साधनों के अनुपात को औसत उत्पादन कहते है।
- **इष्टतम् उत्पादन** – इसे उत्पादन करने वाली फर्म का संतुलन बिन्दु भी कहते है तथा इसका निर्धारण समउत्पाद वक्र तथा समलागत रेखा के स्पर्श बिन्दु के द्वारा होता है।
- **विस्तार पथ** – न्यूनतम लागत उत्पादन के संयोग बिन्दुओं को मिलाने पर विस्तार पथ प्राप्त होता है।
- **प्रतिनमन विशलेषण -** आश्रित तथा स्वतंत्र चरों के मध्य औसत सम्बन्ध को इस विशलेषण से स्थापित किया जाता है।
- **प्रतिगमन समीकरण** - प्रतिगमन विश्लेषण में दो समीकरण स्थापित होते है जैसे प्रथम समीकरण को X चर को स्वतंत्र मान कर तथा Y को निर्भर मान कर निम्न तरह से लिख सकते है। $Y=a + bX$ इसी प्रकार $X=d + bY$

14.13 लघु उत्तरीय प्रश्न

1. कॉब डगलस उत्पादन फलन की प्रतिस्थापन लोच होती है?
2. कॉब डगलस उत्पादन फलन की साधन रहनता का निर्धारण कौन सा अनुपात करता है?
3. कॉब डगलस उत्पादन फलन में उत्पादन की श्रम के सापेक्ष लोच क्या होती है?
4. कॉब डगलस उत्पादन फलन में उत्पादन के कितने साधन लिये गये है?
5. रेखीय रूप से समरूप उत्पादन फलन में साधनों को दुग्ना बढाने पर उत्पादन कितने गुना बढ़ जायेग?

6. कॉब डगलस उत्पादन फलन में उत्पादन की दक्षता का निर्धारण कौन करता है?
7. रेखीय रूप से समरूप कॉब डगलस उत्पादन फलन में (x +B) का मान होता है?
8. कॉब डगलस उत्पादन फलन का विस्तार पथ कैसी रेखा में प्राप्त होता है?
9. कॉब डगलस उत्पादन फलन के समउत्पाद वक्र का ढाल कैसा होता है?
10. वृद्धिमान प्रतिफल के अन्तर्गत कॉब डगलस उत्पादन फलन में (x +B) का मान कितना होग?
11. ह्रास मान प्रतिफल के अन्तर्गत कॉब डगलस उत्पादन फलन में (x +B) का मान कितना होगा?
12. कॉब डगलस उत्पादन फलन में उत्पादन की पूंजी के सापेक्ष लोच क्या होती है।
13. कॉब डगलस उत्पादन फलन को सर्वप्रथम किसने प्रस्तावित किया?
14. कॉब डगलस उत्पादन फलन को किस अर्थ व्यवस्था के ऑकड़ों के माध्यम से स्थापित किया गया?
15. कॉब डगलस उत्पादन फलन में श्रम तथा पूंजी के सापेक्ष सीमांत उत्पादकता किसके समानुपाती होती है?
16. कॉब डगलस उत्पादन फलन में कुल सीमांत उत्पादकता की नाप कौन करता है?

उत्तरमाला – 1. एक 2. $\frac{\alpha}{\beta}$ 3.1 4. दो 5. दुगना 6. A 7. एक 8. सीधी रेखा 9. ऋणात्मक 10. एक से अधिक 11. एक से कम 12. β 13. केनेट विकसैल 14. अमेरिका 15. औसत उत्पादन 16. A.

14.14. दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

1. कॉब डगलस उत्पादन फलन से क्या समझते हो तथा इसकी मुख्य मान्यतायें बताते हुये महत्वपूर्ण विशेषतायें समझाईयें?
2. प्रतिस्थापन लोच को स्पष्ट करते हुये कॉब डगलस उत्पादन फलन की प्रतिस्थापन लोच निर्धारित करियें?
3. कॉब डगलस उत्पादन फलन का आलोचनात्मक मूल्यांकन करते हुये इसके सम उत्पाद वक्र के ढाल को ऋणात्मक सिद्ध कीजियें?
4. विस्तार पथ से क्या समझते है कॉब डगलस उत्पादन फलन का विस्तार पथ एक सीधी रेखा में होता है सिद्ध कीजिये?
5. संशोधित कॉब डगलस उत्पादन फलन को समझाते हुये कॉब डगलस उत्पादन के महत्व को समझायें?

14.14 सन्दर्भ ग्रन्थ सूची

• मिश्र, जयप्रकाश (2005) कृषि अर्थशास्त्र, साहित्य भवन प्रकाशन।
• आहूजा, एच0 एस0 (2002) समष्टि अर्थशास्त्र, एस चन्द प्रकाशन।
• Mehta Mandnani (2001). Mathematics Economics Sultan chand Publication.
• Bose, D. (2003), An Inrtoduction to mathematical Economics, Himalaya Publishing House.
• Bhardwaj, R.S. (2000). Mathematics for Economics and Businese, Excel Books.
• Koutsoyiannis, A. (1979), Modern Micro Economics, Macmillian Press Ltd.
• Gujarati, N. Damodar, (2007), Basic Econometrics, The McGraw Hill companies.

इकाई 15 द्वितीय चरण अतंर सम्बन्धी समीकरण
(Second Order Difference Equation)

15.1 प्रस्तावना
15.2 उद्देश्य
15.3 अतंर समीकरण से तात्पर्य
15.4 अतंर समीकरण की कोटि एवं चरण
15.5 प्रथम चरण अतंर समीकरण का समाधान
15.6 द्वितीय चरण अतंर समीकरण का समाधान
15.7 अतंर समीकरणों से सम्बन्धित विशिष्ट समस्यायें
15.8 अतंर समीकरण के उपयोग एवं महत्व
15.9 सारांश
15.10 शब्दावली
15.11 लघु उत्तरीय प्रश्न
15.12 दीर्घ उत्तरीय प्रश्न
15.13 सन्दर्भ ग्रन्थ सूची

15.1 प्रस्तावना

पूर्व की इकाई में कॉब डगलस उत्पादन फलन तथा इसकी विभिन्न विशेषताओं के व्यापक अध्ययन से यह ज्ञात हुआ कि न सिर्फ इस उत्पादन फलन का कृषि, विनिर्माण, वितरण तथा विकास के क्षेत्र में उपयोग है अपितु इस उत्पादन फलन का बड़ा ही महत्वपूर्ण योगदान गणितीय अर्थशास्त्र को एक स्वतंत्र विषय के तौर पर विकसित होने में भी रहा है। इस उत्पादन फलन के पश्चात ही कई महत्वपूर्ण फलनों तथा उनकी विशेषताओं का उपयोग अर्थशास्त्र के अध्ययन में सुनिश्चित हो पाया है। गणितीय अर्थशास्त्र में कई महत्वपूर्ण विधियों-प्रविधियों का अध्ययन किया जाता है जिससे अर्थशास्त्र के विभिन्न क्षेत्रों जैसे कृषि, उद्योग, अन्तर्राष्ट्रीय व्यापार तथा आर्थिक विकास के क्षेत्र में प्रवृतियों एवं पूर्वानुमानों का अध्ययन किया जाता है। इन सभी विधियों एवं प्रविधियों में आर्थिक चरों की विशेषताओं एवं इनके मध्य स्थापित हो रहे अन्तर सम्बन्धों का अध्ययन करना महत्वपूर्ण हो जाता है। आर्थिक चरों के मध्य परस्पर अन्तर सम्बन्धों को ज्ञात करने तथा इन चरों के माध्यम से महत्वपूर्ण निष्कर्षों का विश्लेषण करने हेतु अनेको विधियों का अध्ययन गणितीय अर्थशास्त्र में किया जाता है। " अन्तर सम्बन्धी समीकरण " का विशलेषण भी उक्त सन्दर्भ में किया जाता है। वर्तमान ईकाई में हम द्वितीय चरण अतंर सम्बन्धी समीकरण का व्यापक अध्ययन करेगें।

15.2 उद्देश्य

- ✓ अतंर सम्बन्धी समीकरण में अतंर से क्या समझते है?
- ✓ अतंर सम्बन्धी समीकरण (difference equation) एवं अवकलन समीकरण (differential equation) में क्या अन्तर है।
- ✓ अतंर सम्बन्धी समीकरण क्या है तथा इसके चरण एवं कोटि (order) किस प्रकार से निर्धारित होती है।
- ✓ अतंर सम्बन्धी समीकरणों की मुख्य विशेषतायें कौन-कौन सी है तथा इन समीकरणों को किस प्रकार से हल किया जाता है।
- ✓ अर्थशास्त्र में अतंर सम्बन्धी समीकरणों के क्या उपयोग है।

15.3 अतंर समीकरण से तात्पर्य

आधुनिक समय में अर्थशास्त्र के अध्ययन में विभिन्न चरों जैसे आय, उपयोग, बचत, निवेश, आयात तथा निर्यात आदि से सम्बन्धित विभिन्न चरों का ‘‘काल आधारित’’ विश्लेषण किया जाता है। यदि के तौर पर वर्तमान समय के उपभोग पिछले समय अन्तराल की आय पर निर्भर करता तथा इस सम्बन्ध को यदि ग्णीतीय समीकरण के रूप में प्रस्तुत किया जाये तो

$$C_t = \alpha\,(y_{t-1})$$

यानि t समय पर उपभोर (t-1) समय की आय पर निर्भर करता है जहाँ α एक स्थिराँक है। अतः अतंर समीकरणों में दो अलग अलग समच अन्तरालों के चरों के मध्य सम्बन्ध स्थापित किया जाता है।

ए0 क्रूरेस के अनुसार, ***‘‘अतंर समीकरण वह समीकरण होती हैं जिसमें आश्रित चर समय पश्च स्वतन्त्र चर पर निर्भर करता है।’’*** सामान्यतया अतंर समीकरण को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$$F[Y_t, Y_{t-1}, Y_{t-2} - - - - -, Y_{t-P}, t] = 0 \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

जहाँ F फलन है तथा Y_t आश्रित चर है जो कि 't' पर आधारित है एवं समय ‘t' एक स्वतंत्र चर है। अतंर समीकरणों के विश्लेषण के लिये पश्च क्रिया आपरेटर या लॉग आपरेटर का उपयोग किया जा सकता है।

$$\text{जहाँ } \mathrm{X_t = L(Y_t)}$$

$$\mathrm{X_t = Y_{t-1}}$$

अत: $\mathrm{Y_{t-1}}$को LY_t लिखा जा सकता है। इसी प्रकार आपरेटर के रूप में समीकरण को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$$\mathrm{F\left[Y_t, LY_{t,} L^2Y_t, L^3Y_t, ------------, L^PY_t, t\right] = 0 \dots \dots \dots \dots (2)}$$

अतंर समीकरण को इस रूप में भी लिख जा सकता है।

$$\mathrm{F\left[Y_{t,} Y_{t+1}, Y_{t+2}, -------------, Y_{t+n}, t\right] = 0 \dots \dots \dots \dots . (3)}$$

इसको अग्र क्रिया आपरेटर के रूप में व्यक्त करने पर

$$F[Y_t, EY_t, E^2Y_t, E^3Y_t, ---------, E^nY_t, t] = 0 \dots \dots \dots \dots (4)$$

अतंर समीकरणों के माध्यम से विभिन्न चरों में समय आधारित व्यवहार या प्रवृति आसानी से ज्ञात की जा सकती है। अर्थशास्त्र में इसका कई महत्वपूर्ण क्षेत्रों में उपयोग किया जाता है जैसे त्वरण सिद्धान्त में,

$$\mathrm{I_t = \beta(C_t - C_{t-1})}$$

जहाँ $\mathrm{I_t}, \mathrm{t}$ समय पर निवेश है। $\mathrm{C_t}$ t समय पर उपभोग है एवं $\mathrm{C_{t-1}}, \mathrm{t-1}$ समय पर उपभोग है।

यद्यपि अर्थशास्त्र के विभिन्न चर समय के अनुसार बदलते रहते है तथा चरों के तिमान विश्लेषण हेतु गणित के सिद्धान्तों का प्रयोग किया जाता है। यहाँ पर यह बहुत महत्वपूर्ण है क्योंकि जब समय को एक चर की भाँति उपयोग में लाया जाता है तो गणितीय सिद्धान्तों का उपयोग समय की प्रवृति के अनुसार ही होता है। यदि समय को निरन्तर चर (Continons Variable) माना जाये तो जिन समीकरणों के माध्यम से स्वतंत्र एवं आश्रित चरों में सम्बन्ध स्थापित किया जाता है उनका विश्लेषण अवकलन समीकरणों (Differential Equations) के माध्यम किया जाता है। यदि समय को खंडित चर के रूप में लिया जाता है यानि चरों को विभिन्न समयान्तराल पर मापा जाये तो स्वतंत्र तथा आश्रित चरों के मध्य स्थापित सम्बन्धों का विश्लेषण अतंर समीकरणों (Differential Equations) के माध्यम से किया जाता है। जैसे आप, उपभोग या बचत सम्बन्धित आकड़ों को प्रतिमाह, तिमाही या सालाना आधार पर एकत्रित किया जाये तो समय खंडित (Discrete) चर होग। उदाहरण हेतु जैसे सैम्युलसन के व्यापार चक्र विश्लेषण में वर्तमान समय की आय पूर्व के दो समयान्तराल पर निर्भर करती है तथा यह व्यापार चक्र विश्लेषण गुणन त्वरक अन्तक्रिया पर आधारित है।

$$\mathrm{Y_t = C_t + I_t + G_t \dots \dots \dots \dots \dots (5)}$$

$\mathrm{Y_t}$ = राष्ट्रीय आय, $\mathrm{I_t}$ = निवेश, $\mathrm{G_t}$ = सरकारी निवेश

$$C_t = \alpha\, Y_{t-1} \dots \dots \dots \dots . . (6)$$

α = सीमांत उपभोर की प्रवृति।

$$\mathrm{I_t = \beta(C_t - C_{t-1}) \dots \dots \dots \dots \dots (7)}$$

β = त्वरक

(6) का मान (5) में रखने पर

$$Y_t = \alpha\,\beta\,Y_{t-1} - \alpha\,\beta\,Y_{t-2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(8)$$

समी0 (8) का मान तथा $G_t = 1$ का मान समी0 (5) में रखने पर

$$Y_t = 1 + \alpha(1+\beta)Y_{t-1} - \alpha\beta Y_{t-2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(9)$$

यह अतंर समीकरण का ऐसा उदाहरण है जो अर्थशास्त्र में बड़ा ही महत्व रखता है।

15.4 अतंर समीकरण की कोटि (Degree) एवं चरण (Order)

अतंर समीकरणों की कोटि तथा चरण के आधार पर विश्लेषण किया जाता है जहाँ तक कोटि का प्रश्न है इसके सन्दर्भ में उत्पादन फलनों के अन्तर्गत अध्ययन किया गया है। किसी भी समीकरण की कोटि से तात्पर्य समीकरण चर राशि की उच्चतम् घात से है जैसे

$Y_t^2 + Y_t + 1 = 0$ समीकरण की कोटि दो है।

$Y_t^3 + Y_t + 2 = 0$समीकरण की कोटि तीन है।

वही दूसरी ओर अतंर समीकरण का चरण चरों के मध्य समय पश्चता (Time Lag) पर निर्भर करता है यदि समयान्तरालों के मध्य एक चरण का अतंर है तो समीकरण प्रथम चरण की होरी एवं यदि समयान्तरालों के मध्य दो चरण का अतंर है तो समीरकण द्वितीय चरण की होग। किसी भी समीकरण का चरण अधिकतम तथा न्यूनतम् समय आधारित चरों के अन्तराल से निर्धारित होती है। जैसे किसी समीकरण में अधिकतम समय अन्तराल पर चर Y_{t+n}तथा न्यूनतम चर Y_{t+1}है तो समीरकण का चरण $(t + n) - (t + 1) = (n-1)$ होगा। उदाहरण के तौर पर विभिन्न चरणों के समीकरणे को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है

$2Y_{t-1} + Y_t = 6$ (प्रथम चरण)

$3Y_{t+3} + Y_{t+2} + Y_t = 5$ (द्वितीय चरण)

$2Y_{t+3} + 3Y_{t+2} - 4Y_{t+1} - 4Y_t = 7$ (तृतीय चरण)

यहाँ पर चरों के समयान्तरालों में अधिकतम अतंर से ही चरण निर्धारित होता है n चरण की समीकरण को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$$a_0 Y_{t+n} + a_1 Y_{t+n-1} + a_2 Y_{t+n-2+} - - - - + a_n Y_t = f(t) \ldots\ldots(10)$$

यदि f (t,y) एक फलन है जो कि समस्त धनात्मक संख्याओं (Positive Integers) तथा सभी वास्तविक संख्याओं (Real Number) हेतु व्यक्त किया गया है तो प्रथम चरण समीकरण को निम्न रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है

$$Y_t = f(t, Y_{t-1}), t - 1,2,3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(11)$$

कुछ विद्वान अतंर समीकरण उसे मानते है जहाँ अतंर $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$को t तथा Y_{t-1}का फलन माना जाये यानि $\Delta Y_t = f(t, Y_{t-1})$ परन्तु $Y_t = f(t, Y_{t-1}) + Y_{t-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(12)$

समीकरण (7) तथा (8) के मध्य अधिक अतंर नहीं हैं। अतः हम समीकरण (7) को ही अतंर समीकरण के रूप में ही निरूपित करें | इसी प्रकार द्वितीय चरण की समीकरण को भी निरूपित किया जा सकता है।

$$Y_{t+2} = f\left(t, Y_{t,} Y_{t+1}\right), \qquad t = 0,1, \ldots\ldots\ldots\ldots..(13)$$

n चरण की समीकरण को निम्न रूपों में व्यक्त कर सकते है।

$a_0(t)Y_{t+n} + a_1(t)Y_{t+n-1} + -------- + a_t(t)Y_t =$
$A(t) \ldots\ldots\ldots (14)$

या $a_0(t)E^nY_t + a_1(t)E^{n-1}Y_t + -------- + a_n(t)Y_t =$
$A(t) \ldots\ldots\ldots.. (15)$

या

$[a_0(t)E^n + a_1(t)E^{n-1} + -------- + a_n(t)]Y_t =$
$A(t) \ldots\ldots\ldots. (16)$

जहाँ $a_0(t), a_1(t), a_2(t), ---, a_n(t) \neq 0$ निरपेक्ष स्थिरॉक है या t के फलन है इसी प्रकार A(t), t का फलन है। समीकरण (16) को निम्न रूप में लिखा जा सकता है।

$$F(E)Y_t = A_t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

जहाँ $F(E) = a_0(t)E^n + a_1(t)E^{n-1} \ldots\ldots + a_n(t) \ldots\ldots\ldots.. (18)$

तथा F(E) = 0, समीरकण (17) की सहायक समीकरण है जिसका समाधान पूरक समाधान कहलाता है। यदि $a_0(t), a_1(t), a_2(t), ---, a_n(t)$ निरपेक्ष स्थिरांक तथा वह t से स्वतंत्र तो उपरोक्त समीकरण रेखीय अंतर समीकरण n चरण की कहलायेगी तथा अंतर समीकरण जो कि (14), (15),(16) के रूप की है। वह गैर रेखीय अतंर समीकरण कहलायेगे।

यदि A(t) = 0, तो समीकरण (17) से

$$F(E)Y_t = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

यह समीकरण समांगी रेखीय अतंर समीकरण कहलायेगे एवं यदि $A(t) \neq 0$ तो समीकरण (14), (15), (16) तथा (17) गैर समांगी समीकरण कहलायेगी ।

15.5 प्रथम चरण अतंर समीकरण का समाधान

यदि समीकरण

$$Y_t = aY_{t-1} + b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

समीकरण का समाधान दो चरणों में प्राप्त किया जाता है जिसे सामान्य समाधान (General Solution) कहते है। यह समाधान विशिष्ट समाधान (Particuler Solution) तथा पूरक समाधान (Complementary Solution) का योग होता है।

अतंर समीकरण के समाधान की प्रमेय के अनुसार प्रथम चरण अतंर गैर समांगी समीकरण प्राप्त करने हेतु समांगी भार का पूरक समाधान प्राप्त किया जाता है तथा गैर समांगी भार हेतु विशिष्ट समाधान प्राप्त किया जाता है। विशिष्ट समाधान सामान्य समाधान को विशिष्ट कालिक मूल्य प्रदान कर ज्ञात किया जाता है।

विशिष्ट समाधान हेतु समीकरण (10) में

$Y_t = Y_{t-1} = Y^*$ रखने पर

$$Y^* = aY^* + b \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

$$Y^* = \frac{b}{1-a}$$

पूरक समाधान की प्राप्ति हेतु समीकरण (10) में स्थिरांक b को हटाने पर

$$\mathrm{Y_t} = \mathrm{aY_{t-1}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

इस समीकरण में $\mathrm{Y_t} = \mathrm{Am^t}$ प्रतिस्थापित करने पर $\mathrm{Am^t} = \mathrm{a\,Am^{t-1}}$, A यहाँ स्वच्छन्द स्थिरांक है। अतः m=a होग। इसलिये पूरक समाधान

$$\mathrm{y_t} = \mathrm{A(a)^t} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (23)$$

चूंकि सामान्य समाधान = पूरक समाधान + विशिष्ठ समाधान

$$Y_t = \mathrm{A(a)^t} + \frac{\mathrm{b}}{1-\mathrm{a}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

यदि हम t का मान शून्य समीकरण (24) में प्रतिस्थापित करे तो

$Y_0 = \mathrm{A(a)^0} + \frac{\mathrm{b}}{1-\mathrm{a}}$ तो $\mathrm{A} = \mathrm{Y_0} - \frac{\mathrm{b}}{1-\mathrm{a}}$ का मान समीकरण (24) में प्रतिस्थापित करने पर

$$Y_t = \mathrm{a^t}\left(\mathrm{Y_0} - \frac{\mathrm{b}}{1-\mathrm{a}}\right) + \frac{\mathrm{b}}{1-\mathrm{a}} \ldots\ldots\ldots.. (25)$$

या $\mathrm{Y_t} = \mathrm{a^tY_0} + \frac{\mathrm{b(1-a^t)}}{1-\mathrm{a}}$ यदि $a \neq 1$

$\mathrm{Y_t} = \mathrm{Y_0} + \mathrm{b}$ यदि $a = 1$

उदाहरण 1,

$\mathrm{X_t} = 2\mathrm{X_t} - 8$ को हल कीजिये। यदि $\mathrm{X_0} = 5$

हल,

$\mathrm{X_t} = 2\mathrm{X_t} - 8$ esa $X_t = X_{t-1} = X^*$ प्रतिस्थापित करने पर

$\mathrm{X^*} = 2\mathrm{X^*}$&8

$\mathrm{X^*} = 8$ यह विशिष्ठ समाधान है। पूरक समाधान हेतु हमें समीकरण

$\mathrm{X_t} = 2\mathrm{X_t} - 8$ से स्थिर राशि 8 हटाने पर $\mathrm{X_t} = 2\mathrm{X_t}$ में $\mathrm{X^t} = \mathrm{Am^t}$ रखने पर

$\mathrm{Am^t} = 2\mathrm{Am^{t-1}}$ यहाँ m =2

अतः पूरक समाधान $\mathrm{X^t} = \mathrm{A\ 2^t}$

चुंकि सामान्य समाधान = पूरक समाधान + विशिष्ठ समाधान

$$X_t = A2^t + 8 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (26)$$

चूंकि $\mathrm{X_0} = 5$ है

अतः t= 0 एवं $\mathrm{X_0} = 5$ समीकरण (26) में प्रतिस्थपित करने पर

$$5 = A\ 2^t + 8$$

$$5 = A + 8, \qquad A = -3$$

को पुनः (26) में प्रतिस्थापित करने पर

$$X_t = 2^t(-3) + 8$$

15.6 द्वितीय चरण अतंर समीकरण का समाधान (समांगी समीकरण)

यदि निम्न समांगी समीकरण को लिया जाये

$$\mathrm{Y_{t+2} + aX_{t+1} + bX_t = 0} \ldots \ldots \ldots . (27)$$

पूरक समाधान हेतु समीकरण (17) $\mathrm{Y_t = Am^t, Y_{t+1} = Am^{t+1}}$ एवं $\mathrm{Y_{t+2} = Am^{t+2}}$ रखने पर (यहाँ पर पूरक समाधान ही सामान्य समाधान होग)

$$\mathrm{Am^{t+2} + aAm^{t+1} + bAm^t = 0} \ldots \ldots \ldots \ldots (28)$$

समीकरण (18) को Am^t से भार देने पर

$$\mathrm{m^2 + am + b = 0} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . (29)$$

इस समीकरण के समाधान की निम्न तीन दशाये होगे।

⟶ प्रथम, इस समीकरण में यदि m के दो मान m तथा my आये तो सामान्य समाधान

$\mathrm{Y_t = Cm_1^t + D\, m_2^t}$ जहाँ $\mathrm{m_1 = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}}$ तथा $\mathrm{m_2 = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}}$

यह तभी होगा जबकि $\mathrm{\frac{a^2}{4} - b > 0}$

⟶ द्वितीय, इस समीकरण में $m = m_1 = m_2$ का एक ही मान आये एवं यह तभी संभव होग जबकि $\mathrm{\frac{a^2}{4} - b = 0}$ इस दशा में पूरक समाधान $\mathrm{Y_t = (C + Dt)m^t}$

⟶ तृतीय, इस समीकरण के हल हेतु m का कोई वास्तविक हल न आये तथा यह तभी संभव होग जबकि $\mathrm{\frac{a^2}{4} - b < 0}$

इस दशा में सामान्य समाधान $Y_t = Cr^t(\theta t + \omega),\ r = \sqrt{b},\quad \cos\theta = -\frac{a}{(2\sqrt{b})}$

$$\mathrm{Y_t = Cr^t \cos(\theta t + \omega)}$$

गैर समांगी समीकरण हेतु अतंर समीकरण का समाधान सर्वप्रथम निम्न असमांगी समीकरण को लिया जायें

$$\mathrm{Y_{t+2} + Y_{t+1} + bY_t = r_t} \ldots \ldots \ldots \ldots . . (30)$$

इस समीकरण की समांगी करण निम्न होगी

$$\mathrm{Y_{t+2} + Y_{t+1} + bY_t = 0} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (31)$$

इस समीकरण हेतु पूरक समाधान पिछले उदाहरण की भाँति ज्ञात किया जायेग। इस दशा में सामान्य समाधान

$\mathrm{Y_t}$ = पूरक समाधान (Y) + विशिष्ट समाधान (Y*)

$$\mathrm{Y_t = Cm_1^t + Dm_2^t + Y^*}$$

यदि $r_t = r$ तो समीकरण (30) निम्न प्रकार होगी

$$Y_{t+2} + Y_{t+1} + bY_t = r \dots \dots \dots \dots \dots \dots (32)$$

विशिष्ट समाधान हेतु

$$Y_{t+2} = Y_{t+1} = Y_t = Y^*$$
$$Y^* + aY^* + bY^* = r$$
$$Y^*(1 + a + b) = r$$
$$Y^* = \frac{r}{1 + a + b}$$

परन्तु यह तभी सम्भव होग जबकि $1 + a + b \neq 0$

यदि $1 + a + b \neq 0$ तो कोई भी स्थिर फलन समीकरण (32) को सतुष्ट नहीं कर पायेगा।

समीकरण $Y_{t+2} + aY_{t+1} + bY_t = r_t$ में r_t को सामान्यतया निम्न रूप में लिखा जा सकता है।

a^t बहुघातीय समीकरण, $\cos(bt)$, $\sin(bt)$

इस स्थिति में अनिश्चित गुणांक विधि द्वारा हल करेगें। (Method of Undetermined Coefficients) अतः r_t के विभिन्न रूपों संभावित या अनुमानित समाधान को समीकरण में प्रतिस्थापित कर विशिष्ट समाधान ज्ञात किया जा सकता है।

क्रम संख्या	r_t के रूप	संभावित समाधान
1	a^t	ca^t
2	बहुघातीय समीकरण n कोटि में	$(c_0t^n + c_1t^{n-1} + - - - - - + c_n)$
3	a^t P(t), जहाँ P(t) बहुघातीय समीकरण n कोटि में	$a^t\ (c_0t^n + c_1t^{n-1} + - - - + c_n)$
4	$\sin(bt)$ या $\cos(bt)$	$c_1\cos(bt) + c_2\sin(bt)$
5	$a^t\ \sin(bt)$ या $\cos(bt)$	$a^t[c_1\cos(bt) + c_2\sin(bt)]$

उदाहरण –6, $Y_t = Y_{t-1} + Y_{t-2} + 11$ का सामान्य समाधान ज्ञात करियें ? यदि $Y_0 = 5, Y_1 = 7$

हल- सर्वप्रथम समीकरण के माध्यम से विशिष्ठ समाधान निकाला जायेगा।

यानि $Y_t = Y_{t-1} = Y_{t-2} = Y^*$ को समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर

$$6Y_t = Y_{t-1} + Y_{t-2} + 11 \dots \dots \dots \dots . (33)$$
$$6Y^* = Y^* + Y^* + 11$$
$$Y^* = \frac{11}{4}$$

पूरक समाधान की प्राप्ति हेतु समीकरण (33) से स्थिर राशि 11 को हटाने पर

$$6Y_t = Y_{t-1} + Y_{t-2} \dots \dots \dots \dots \dots . (34)$$

समीकरण (31) में $Y_t = Am^t$ प्रतिस्थापित करने पर

$6\mathrm{Am}^{\mathrm{t}} = \mathrm{Am}^{\mathrm{t}-1} + \mathrm{Am}^{\mathrm{t}-2}$

उपरोक्त को $\mathrm{Am}^{\mathrm{t}-2}$से विभाजित करने पर

$$6m2 \ = \ m + 1$$

$$6m2 - m - 1 = \ 0$$

उक्त के गुणन खंड करने पर

$$(2m - 1)(3m + 1) = 0$$

यानि $m \ = \ 1/2$ या $m \ = \ -1/3$

अतः पूरक समाधान $\mathrm{Y_t} = \mathrm{C}\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{t}} + \mathrm{D}\left(-\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{t}}$

चूंकि सामान्य समाधान = पूरक समाधान + विशिष्ट समाधान

$$\mathrm{Y_t} = \mathrm{C}\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{t}} + \mathrm{D}\left(-\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{t}} + \frac{11}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots..(35)$$

चूंकि समीकरण (25) में दो स्वच्छन्द स्थिरांक है।

अतः इसमें पहले $Y_0 \ = \ 5$ तथा $t = \ 0$ एवं $Y_1 \ = \ 7$ तथा $t \ = \ 1$ प्रतिस्थापित करने पर

$5 \ = \ C \ + \ D \ + \ \frac{11}{4}$ यानि $C \ + \ D \ = \ 5 - \frac{11}{4} = \frac{9}{4}$

$$C \ + \ D \ \frac{9}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(36)$$

$$5 = \mathrm{C}\left(\frac{1}{2}\right) + \mathrm{D}\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{11}{4}$$

$$\frac{\mathrm{C}}{2} - \frac{\mathrm{D}}{3} = 7 - \frac{11}{4} = \frac{17}{4}$$

$$3\mathrm{C} - 2\mathrm{D}3C - 2D = \frac{102}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(37)$$

समीकरण (27) तथा (26) से $C \ = \ 6 \ D \ = \ \frac{-15}{4}$दोनों का मान समीकरण (35) में रखने पर

$$\mathrm{Y_t} = 6\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{t}} - \frac{15}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{t}} + \frac{11}{4} \quad \text{उत्तर}$$

15.7 अतंर समीकरणों से सम्बन्धित विशिष्ट समस्यायें

कभी-कभी सामान्य तरीकों से समीकरणों को हल नहीं किया जा सकता है। जैसे

उदाहरण 3,

$4\mathrm{Y_t} - \mathrm{Y_{t-1}} - 3\mathrm{Y_{t-2}} = 14$ को$X_0 \ = \ 2, X_1 \ = \ 0.5$ की सहायता से हल कीजियें?

हल

$$4Y_t - Y_{t-1} - 3Y_{t-2} = 14 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(38)$$

$Y_t = Y_{t-1} = Y_{t-2} = Y^*$ प्रतिस्थापित करने पर

$$4Y^* - Y^* - 3Y^* = 14$$

$0 = 14$ यह सम्भव नहीं है।

अतः $Y_t = Y^*t$ समीकरण (38) में प्रतिस्थापित करने पर

$$4Y^*t - Y^*(t-1) - Y^*(t-2) = 14,$$

$$4Y^*t - Y^*t + Y^* - 3Y^*t + 6Y^* = 14,\ Y^* = 2$$

$$4Y_t - Y_{t-1} - 3Y_{t-2} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(39)$$

समीकरण (26) $Y_t = Am^t, Y_{t-1} = Am^{t-1}$ तथा $Y_{t-2} = Am^{t-2}$ प्रतिस्थापित करने पर $4Am^t - Am^{t-1} - 3Am^{t-2} = 0$

उपरोक्त को Am^{t-2} से विभाजित करने पर $4m2 - m - 3 = 0$

उपरोक्त के गुणनखंण्ड करने पर $(4m+3)(m-1) = 0$

$m = -3/4$ तथा $m = 1$

अतः पूरक समाधान $Y_t = C\left(-\frac{3}{4}\right)^t + D(1)^t$ सामान्य समाधान $Y_t = Y + Y^*$

$$Y = C\left(-\frac{3}{4}\right)^t + D(1)^t + 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(40)$$

समीकरण (27) में$Y_0 = 2, t = 0$ एवं $Y_1 = 0.5$ तथा $t = 1$ प्रतिस्थापित करने पर निम्न दो समीकरण प्राप्त होती है।

$C + D = 0$ तथा $-3C + 4D = -6$

दोनों समीकरणों को हल करने पर $C = 6/7$ एवं $D = -6/7$

C तथा D का मान समीकरण (27) में प्रतिस्थापित करने पर

$$Y_t = \frac{6}{7}\left(-\frac{3}{4}\right)^t - \frac{6}{7}(1)^t + 2$$

उपरोक्त उदाहरण की भाँति यदि अतंर समीकरण में दायी ओर की राशि स्थिर न होकर समय का फलन हो तो सामान्य तरीके से इस अतंर समीकरण का हल नहीं निकाला जा सकता है इसको निम्न उदाहरण के माध्यम से समझाया जा सकता है।

उदाहरण 4, $Y_{t+2} - Y_{t+1} + Y_t = 2t - 3 \ldots\ldots\ldots(41)$

उपरोक्त समीकरण का सामान्य हल ज्ञात कीजियें ?

हल – इस समीकरण को पहले समांगी समीकरण में बदल कर पूरक समाधान ज्ञात किया जायेगा।

$$Y_{t+2} - Y_{t+1} + Y_t = 0$$

उपरोक्त समीकरण में $Y_t = Am^t, Y_{t+1} = Am^{t+1}$ तथा $Y_{t+2} = Am^{t+2}$रखने पर $Am^{t+2} -$

$5\mathrm{Am}^{t+1} + 6\mathrm{Am}^{t} = 0$ को Am^{t} से विभाजित करने पर निम्न सहायक समीकरण प्राप्त होती है

$$m^2 - 5m + 6 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots..(42)$$

उपरोक्त के गुणनखंड करने पर m = 2 तथा m = 3 प्राप्त होते है।

अतः पूरक समाधान

$\mathrm{Y} = \mathrm{C}(2)^{t} + \mathrm{D}(3)^{t} \ldots\ldots\ldots\ldots..(43)$

समीकरण (29) का दायी ओर का भाग यह अनुमान लगाया जा सकता है कि विशिष्ट समाधान $\mathrm{Y}_t^* = \mathrm{at} + \mathrm{b}$ के प्रकार का हो सकता है। अतः अज्ञात गुणांक ज्ञात करने की विधि a तथा b के मान ज्ञात करने हेतु उपयोग में लायी जा सकती है। समीकरण (29) में $\mathrm{Y}_t^* = \mathrm{at} + \mathrm{b} = \mathrm{Y}_t$

$\mathrm{Y}_{t+1} = \mathrm{Y}_{t+1}^* = \mathrm{a}(t+1) + \mathrm{b}, \mathrm{Y}_{t+2}^* = \mathrm{a}(t+2) + \mathrm{b} = \mathrm{Y}_t + 2$ प्रतिस्थापित करने पर

$$a(t+2) + b - 5[a(t+1) + b] + 6(at+b) = 2t - 3$$
$$2at - 3a + 2b = 2t - 3$$

t के गुणांक की तथा स्थिर राशि की उपरोक्त समीकरण में तुलना करने पर

$2a = 2$ यानि $a = 1$ तथा $-3a + 2b = -3, b = 0$

अतः विशिष्ट समाधान $\mathrm{Y}_t^* = \mathrm{at} + \mathrm{b}$ में a तथा b प्रतिस्थापित करने पर $\mathrm{Y}_t^* = \mathrm{t}$ अतः सामान्य $\mathrm{Y}_t = \mathrm{C}(2)^{t} + \mathrm{D}(3)^{t} + \mathrm{t}$ जिसे t के विभिन्न दिये मानों तथा $Y_0, Y_1, - - - - - - - - - - -$ आदि के आधार पर C तथा D के लिये हल किया जा सकता है।

उदाहरण 5 :- $Y_{t+2} - 5Y_{t+1} + 6Y_t = 4^t + t^2 + 3$ को हल कीजियें ?

हल –

इस समीकरण की समांगी समीकरण निम्न होगी$m^2 - 5m + 6 = 0$ तथा इसके लिये $m = 2$ तथा $m = 3$

अतः पूरक समाधान $= \mathrm{C}2^{t} + \mathrm{D}3^{t}$

$$\mathrm{Y}_{t+2} - 5\mathrm{Y}_t + 6\mathrm{Y}_t = 4^t + t^2 + 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(44)$$

का विशिष्ट समाधान निम्न रूप का हो सकता है।

$\mathrm{Y}_t = \mathrm{Y}_t^* = \mathrm{E}4^{t} + \mathrm{F}t^2 + \mathrm{G}t + \mathrm{H}$
$\mathrm{Y}_{t+1}^* = \mathrm{E}\mathrm{Y}^{t+1} + \mathrm{F}(t+1)^2 + \mathrm{G}(t+1) + \mathrm{H}$
$\mathrm{Y}_{t+2} = \mathrm{Y}_{t+2}^* = \mathrm{E}4^{t+2} + \mathrm{F}(t+2)^2 + \mathrm{F}(t+2) + \mathrm{H}$

उपरोक्त तीनों के मान समीकरण (44) में रखने पर

$$\mathrm{E}4^{t+2} + \mathrm{F}(t+2)^2 + \mathrm{G}(t+2) + \mathrm{H}$$
$$- 5[\mathrm{E}4^{t+1} + \mathrm{F}(\mathrm{D}+1)^2 + \mathrm{G}(t+1) + \mathrm{F}]$$
$$+ 6[\mathrm{E}4^{t} + \mathrm{F}t^2 + \mathrm{G}t + \mathrm{H}] = 4^t + t^2 + 3$$

उपरोक्त को हल करने पर $2\mathrm{E}4^{t} + 2\mathrm{F}t^2 + (-6\mathrm{F} + 2\mathrm{G})t + (-\mathrm{F} - 3\mathrm{G} + 2\mathrm{H}) = 4^t +$

$t^2 + 3$

दोनों ओर 4^t, t^2, t तथा स्थिर राशि के गुणांको की तुलना करने पर

$E = 1/2, F = y, G = 3/2$ तथा $H = 4$

अतः विशिष्ट समाधान = $\frac{1}{2}4^t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 4$

एवं सामान्य समाधान = $C2^t + D3^t + \frac{1}{2}4^t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 4$

15.8 अतंर समीकरणों के महत्व तथा उपयोग

अतंर समीकरणों की भूमिका विशेष तौर पर अर्थव्यवस्था में गतिशील सन्तुलन का विश्लेषण करने में बड़ी ही महत्वपूर्ण है चूंकि अर्थव्यवस्था में सभी चर गतिशील प्रकृति के होते है तथा स्थैतिक सन्तुलन मात्र साम्य पर चरों के मान के सम्बन्ध में ही जानकारी प्रदान करता है। जबकि गतिशील विश्लेषण से यह ज्ञात होता है कि पूरे अर्थतंत्र का व्यवहार कैसा है। जैसे कीमत तंत्र में उतार चढाव की व्यवस्था इसी प्रकार ब्याज दर, विनियम दर, निवेश दर आदि सभी महत्वपूर्ण समष्टि आर्थिक चरों में उतार चढाव की व्यवस्था तथा किस प्रकार यह चर संतुलन की ओर प्रेरित होते है। इन सभी की व्यवस्था का विश्लेषण अतंर समीकरणों के माध्यम से ही सम्भव हो पाता है। अतः इन समीकरणों के अनेको महत्व है तथा अर्थशास्त्र के विश्लेषण में यह अत्याधिक उपयोगी है समीकरणों के निम्न महत्वपूर्ण उपयोग है।

⟶ गतिशील संतुलन के विश्लेषण में इनकी मुख्य भूमिका रहती है।

⟶ विभिन्न चरों का समय आधारित तय किया गया पथ (Time Path) क्या होग। इसका विश्लेषण इन समीकरणों के माध्यम से किया जाता है।

⟶ चरों के प्रत्याशित मूल्यों का ऑकलन तथा इनके माध्यम से भावी मानों का पूर्वानुमान लगया जा सकता है।

⟶ आर्थिक साम्य की स्थिरता, अस्थिरता तथा स्थायित्व की विवेचना की जाती है।

⟶ आर्थिक संवृद्धि के मॉडल जैसे सोलो, हैराड-डोमर तथा अनेक महत्वपूर्ण आर्थिक माडल जैसे काब बैब मॉडल, गुणक त्वरक आदि सिद्धान्त इन्ही समीकरणों पर आधारित हैं। जिन्हें निम्न प्रकार से समझाया जा सकता है।

मकड़ जाल सिद्धान्त

इस सिद्धान्त के माध्यम से कृषि मूल्यों के उतार-चढाव का विश्लेषण किया जाता है यह सिद्धान्त समय अन्तराल (Time Lag) की धारणा पर आधारित है इसके अनुसार पूर्ति की मात्रा पिछले समय की कीमत पर ही निर्भर है।

$S_t = S(P_{t-1})$, $D_t = D(P_t)$

चूंकि संतुलन पर $D_t = S_t$ जहाँ $D_t = \alpha P_t + a$ तथा $S_t = \beta P_{t-1} + b$ (α माँग वक्र तथा β आपूर्ति वक्र का ढाल है।)

$$\alpha P_t + a = \beta P_{t-1} + b, \quad P_t = \frac{\beta}{\alpha}P_{t-1} + \frac{b-a}{\alpha}$$

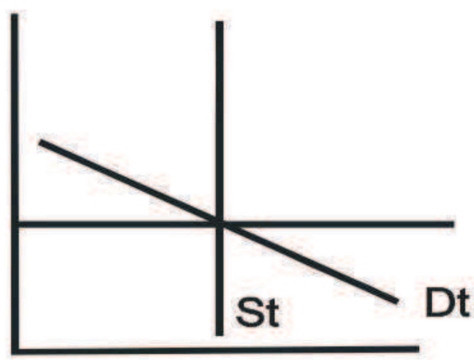
यदि $\frac{\beta}{\alpha} = A$ तथा $\frac{b-a}{\alpha} = B$ तो $P_t = AP_{t-1} + B$

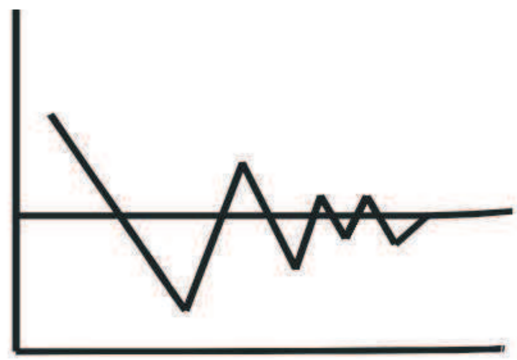
उपरोक्त समीकरण प्रथम चरण अतंर समीकरण है जिसका

$$P_t = A^t \left[P_0 - \frac{B}{1-A}\right] + \frac{B}{1-A}$$

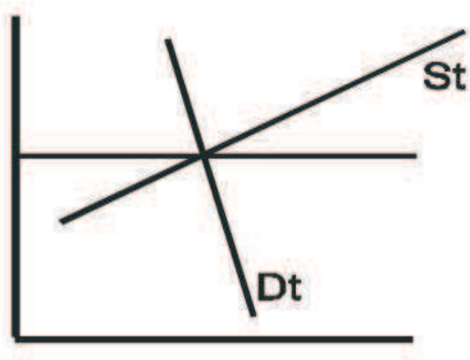
इस दशा में तीन स्थितियाँ होगी।

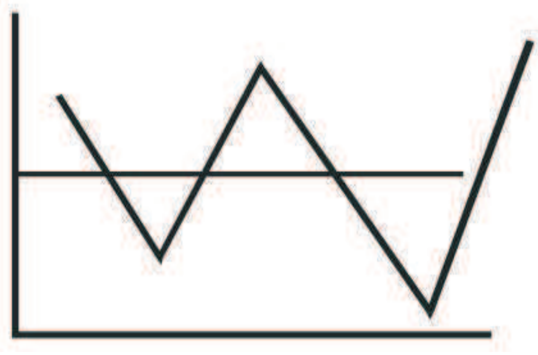
$\longrightarrow$ यदि A का मान $-1 < A < 1$ के मध्य होग तो कीमत तंत्र में उतार चढाव साम्य मूल्य की ओर होते जायगें यानि केन्द्राभिमुख मकड़ जाल होगा। आपूर्ति वक्र का ढाल $|\beta| < |\alpha|$माँग वक्र के ढाल से



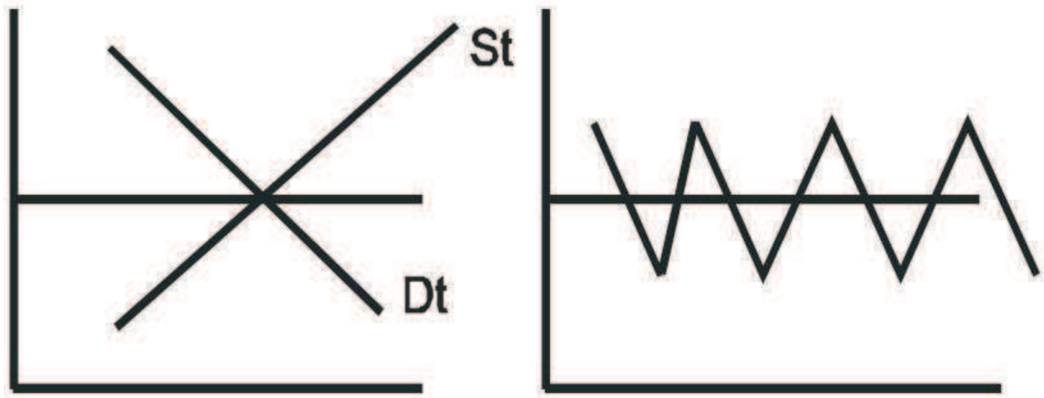


$\longrightarrow$ यदि $|A| > 1$ तो $|\alpha| < |\beta|$इस अवस्था में अपसारी मकड़ी जाल बनेगा तथा कीमत साम्य से निरन्तर दूर होती जायेगे। माँर वक्र का ढाल का आपूर्ति के ढाल से कम होगा।





$\longrightarrow$ यदि $|A| = 1$ तो $|\alpha| = |\beta|$ इस दशा में उतार–चढाव में न तो कमी होरी न वृद्धि कीमते एक ही प्रकार से साम्य के चारों ओर चक्कर काटती रहेगी। माँग तथा आपूर्ति वक्र का ढाल समान रहेगा।



समष्टि आर्थिक मॉडल

समष्टि अर्थशास्त्र में आय, उपभोर, बचत आदि के आधार पर मॉडलों का निर्माण किया जाता है। इस प्रक्रिया में द्वितीय चरण अतंर समीकरण महत्वपूर्ण भूमिका निभाती है। कीन्स आय उपभोग समीकरण में उपभोर का प्लान, प्रत्यासित या अनुमानित आय पर निर्भर करता है। उदाहरण के तौर पर उपभोर फलन को निम्न रूप में लिखा जा सकता है।

$$C_t = a + bY_t^e$$

जहाँ a स्वायत्त उपभोर है तथा b सीमांत उपभोर की प्रवृत्ति है एवं e प्रत्याशित आय है।

यदि $a = 10$ इकाई तथा $b = 0.8$ तो

$$C_t = 10 + 0.8Y_t^e \dots\dots\dots.(45)$$

किसी काल में प्रत्याशित आय को सरल तौर पर पिछले दो सालों में यानि t-1, t-2 समय में प्राप्त आय के औसत के आधार पर अनुमानित कर सकते है।

अतः $Y_t^e = 0.5Y_{t-1} + 0.5Y_{t-2}$ का मान समीकरण (45) में रखने पर

$$C_t = 10 + 0.8(0.5Y_{t-1} + Y_{t-2})$$

$$C_t = 10 + Y_{t-1} + Y_{t-2} \dots\dots(46)$$

यह द्वितीय चरण समीकरण है।

चूँकि $Y_t = C_t + I + G \dots\dots\dots\dots..(47)$

जहाँ I तथा G प्रत्येक समय के लिये समान है यानि t पर निर्भर नहीं है। I जहाँ निजी निवेश है तथा G सरकारी निवेश है।

C_t का मान समीकरण (37) में रखने पर

$$Y_t = 10 + 0.4Y_{t-1} + 0.4Y_{t-2} + I + G \dots\dots\dots\dots\dots(48)$$

यदि I = 50 एवं G = 50 तो समीकरण (48) निम्न रूप में प्राप्त होगी।

$$Y_t = 110 + 0.4Y_{t-1} + 0.4Y_{t-2} \dots\dots\dots..(49)$$

साम्य पर आय का स्तर स्थिर होगा। अतः $Y_t = Y_{t-1} = Y_{t-2} = Y^*$ को समीकरण (49) में प्रतिस्थापित करने पर

$Y^* = 110 + 0.4Y^* + 0.4Y^*$

$0.2Y^* = 110,\ Y^* = 550$

यदि अब I यदि समान रहता है तथा G बढ़कर 60 हो जाता है तो

$$Y_t = 120 + 0.4Y_{t-1} + 0.4Y_{t-2} \dots \dots \dots \dots \dots (50)$$

एवं $Y_t = Y_{t-1} = Y_{t-2} = Y^*$ रखने पर तथा साम्य $Y^* = 600$ प्राप्त होता है।

अतः 550 से 600 तक का समय आधारित पथ समीकरण (50) में t क विभिन्न मान रखकर प्राप्त किया जा सकता है। यदि माना जायें कि आय का स्तर 550 काफी समय तक बना रहा हो तो

$Y_0 = 550, Y_1 = 550$ समीकरण (50) में रखने पर

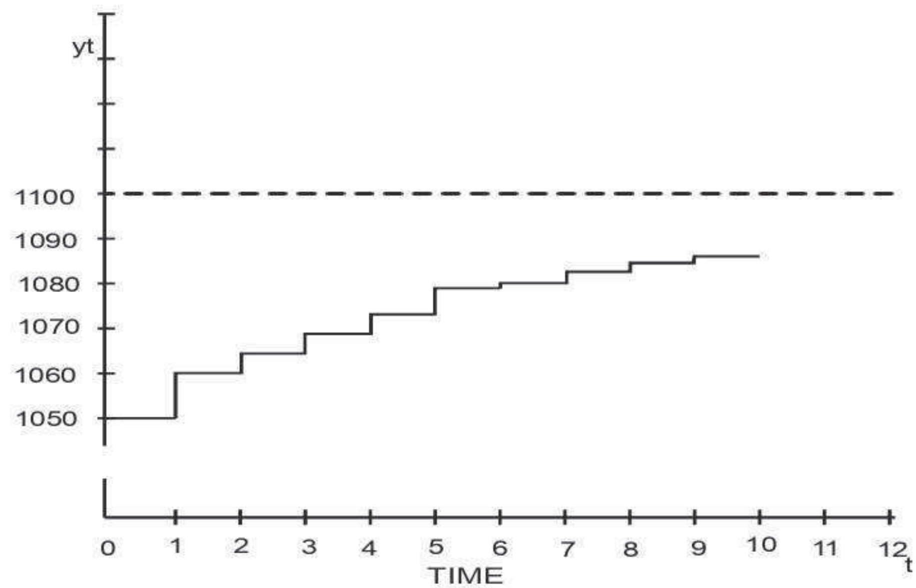
$$Y_2 = 120 + 0.4(550) + 0.4(550)$$
$$Y_2 = 560$$

समीकरण (50) से Y_3 का मान

$$Y_3 = 120 + 0.4(560) + 0.4(550)$$
$$Y_3 = 564$$

अतः इसी प्रकार समीकरण (50) से $Y_4, Y_5, Y_6 \dots$ के मान ज्ञात किये जा सकते है जो कि निम्नवत् है।

$$Y_4 = 569.6, \quad Y_5 = 573.44, \quad Y_6 = 577.22, Y_7 = 580.264$$



अतः Y के विभिन्न मानों से आय का समय आधारित पथ को सरलता से ज्ञात किया जा सकता है। जिससे हम विभिन्न समयान्तरालों पर आय के विभिन्न स्तरों का आकलन आसानी से कर सकते है।

15.9 सारांश

इस प्रकार से अतंर समीकरण का व्यापक अध्ययन करने पर यह ज्ञात होता है कि अर्थशास्त्र में इन समीकरणों का योगदान कितना महत्वपूर्ण हैं। अतंर समीकरणों के उपयोग के माध्यम से स्थैतिक साम्य, गतिशील साम्य तथा तुलनात्मक स्थैतिक साम्य की विवेचना की जा सकती है। इन समीकरणों ने अर्थशास्त्र के विश्लेषण में गतिशीलता का दृष्टिकोण प्रदान किया है। समष्टि आर्थिक चरों के विश्लेषण के साथ-साथ सवृद्धि मॉडलों की विवेचना इन समीकरणों के माध्यम से की जा सकती है। अर्थशास्त्र के विभिन्न क्षेत्रों में जैसे राष्ट्रीय आय, निवेश, बचत, उपभोग, आयात-

निर्यात, कृषि मूल्यों, मुद्रा स्फीति, ब्याज दर, विनिमेय दर, सार्वजनिक ऋण आदि का आकलन किया जा सकता है सरल आर्थिक मॉडलों से लेकर जटिल आर्थिक मॉडलों का विश्लेषण अतंर समीकरणों के माध्यम से किया जा सकता है। यह वर्तमान समय में ज्ञात है कि आर्थिक चरों में आर्थिक चरों में व्यापक उतार चढ़ाव आते रहते है। अतः समसामयिक आर्थिक जगत में अतंर समीकरणों का योगदान अर्थशास्त्र विषय के अध्ययन में बड़ा ही महत्वपूर्ण है। इसलिये इन समीकरणों का व्यापक विश्लेषण अपरिहार्य है।

15.10 शब्दावली

- **स्थिर साम्य :-** जो साम्य असंतुलित होने के बाद पुनः प्रारम्भिक स्थिति में लौट आता है।
- **अस्थिर साम्य :-** जो साम्य असंतुलित होन के बाद प्रारम्भिक स्थिति में नहीं लौट पाता है।
- **स्थैतिक साम्य :-** ऐसा साम्य जहाँ समय तत्व तथा साम्य समायोजन प्रक्रिया का आभाव होता है।
- **गतिशील साम्य :-** ऐसा साम्य जो कि समय तत्व पर आधारित होने के साथ-साथ साम्य तक समायोजन प्रक्रिया को भी आत्मसात् करता है।
- **खंडित फलन :-** दो समय अन्तरालों के मध्य जब चर सभी समयों पर आधारित मानो को आत्मसात नही करते है।
- **सतत् फलन :-** दो समय अन्तरालों के मध्य जब चर समस्त मानों को आत्मसात् करते है।
- **मकड़ जाल :-** इस सिद्धान्त के माध्यम से कृषि मूल्यों के उच्चावचनों की प्रकृति निर्धारित की जाती है।
- **अवकलन समीकरण :-** जब समीकरण में चरों (स्वतंत्र,आश्रित) के साथ-साथ अवकलन गुणांक भी होते है। ऐसी समीकरण अवकलन समीकरण कहलाती है।
- **गुणक :-** सार्वजनिक निवेश में वृद्धि पर क्या प्रभाव पड़ता है। यानि $\Delta y = K\Delta G$
- **त्वरक :-** उपभोग में वृद्धि का निवेश वृद्धि पर क्या प्रभाव पड़ता है। यानि $\Delta \mathrm{I} = \beta(\Delta \mathrm{C})$
- **स्वायत्त उपभोग :-** सामान्यतया उपभोर आय पर निर्भर होता है परन्तु जो उपभोग आय पर निर्भर नहीं होता है या आय के शून्य होने की स्थिति में किये गये उपभोर को स्वायत्त उपभोग कहते है।
- **सार्वजनिक निवेश :-** यह निवेश सरकार या सार्वजनिक सत्ता द्वारा किया जाता है तथा यह निवेश लाभ की आशा से प्रेरित नहीं होता है।
- **औसत उपभोग की प्रवृत्ति :-** आय तथा उपभोग के अनुपात को औसत उपभोग की प्रवृत्ति कहते है।
- **सीमांत उपभोग की प्रवृत्ति :-** आय में परिवर्तन से उपभोर में कितना परिवर्तन हुआ है यह सीमांत उपभोग की प्रवृत्ति कहलाती है। सीमांत उपभोग की प्रवृत्ति = उपभोग में परिवर्तन/आय में परिवर्तन
- **व्यापार चक्र :-** समय के आधार पर विभिन्न आर्थिक चरों जैसे आय, उपभोग, निवेश, बचत आदि के उतार चढाव का विश्लेषण व्यापार चक्रों के अन्तर्गत किया जाता है।

15.11 लघु उत्तरीय प्रश्न

1.निम्न में कौन अन्तर समीकरण है :

(अ) $X = aX + bY$
(ब) $Y = CX^2 + d$
(स) $X_t = aX_{t-1} + b$
2. अतंर समीकरण चरों के मान समय आधारित होते हैं। (हाँ/नहीं)
3. Y$Y_{t+3} + Y_{t+2} - 3Y_{t+1} - 4Y_t = 6$समीकरण का अंतर कितना है?
4. अतंर समीकरण का सामान्य या पूर्ण समाधान योग होता है?
5. पूरक समाधान अतंर समीकरण के किस भाग का समाधान होता हैं।
6. $\mathrm{Y_{t+2} - 3Y_{t+1} + 2Y_t = 0}$ का पूरक समाधान ज्ञात कीजियें?
7. $\mathrm{Y_{t+2} - 4Y_{t+1} + 4Y_t = 0}$ का पूरक समाधान ज्ञात कीजियें?
8. $X_t = 3X_{t-1} - 10$ का विशिष्ट समाधान ज्ञात कीजियें?
9. $\mathrm{X_t = \frac{1}{2}X_{t-1} - 10}$ का सामान्य समाधान ज्ञात कीजियें?
10. $X_t = -3X_{t-1} - 4$ का सामान्य समाधान ज्ञात कीजियें?
11. अतंर समीकरण कौन से साम्य का विश्लेषण करता है?
12. गुणक त्वरक अन्तक्रिया किस अर्थशास्त्री ने दी?
13. $L\ Yt$ को किस रूप में लिया जा सकता है?
14. मकड़ जाल सिद्धान्त के आधार पर किस प्रकार के मूल्यों का विश्लेषण होता है?
15. $\mathrm{Y_t^2 + Y_t + 2 = 0}$ की कोटि कितनी है?

उत्तरमाला :- 1. स 2. हाँ 3. तीन 4.पूरक तथा विशिष्ट समाधान 5. समांगी भाग

6. $\mathrm{Y_t = c(2)^t + D(1)^t}$ 7. $\mathrm{Y_t = (c + Dt)(2)^t}$ 8. $X^* = 5$ 9. $X_t = \left(\frac{1}{3}\right)^t (x_0 - 6) + 6$
10. $X_t = (-3)^t(x_0 - 1) + 1$
11. प्रगतिशील साम्य 12.सैम्युलशन 13. $\mathrm{Y_{t-1}}$ 14.कृषि मूल्य 15.दो

15.12 दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

1. अतंर समीकरण को समझाते हुये अर्थशास्त्र में इनका महत्व बताइये?
2. अतंर सीमाकरण के कोटि तथा चरण से क्या समझते है तथा अवकलन समीकरण से यह से यह समीकरण किस प्रकार भिन्न है।
3. निम्न समीकरण को हल कीजियें
(अ) $Y_t = 2Y_{t-1} + 4, Y_0 = 1$
(ब) $Y_t - 2Y_{t-1} + 4 = 0,\ Y_0 = 3$
(स) $Y_t = Y_{t-1} + 2, Y_0 = 2$
(द) $Y_t + 4Y_{t-1} + 3 = 0, Y_0 = -2$

$Y_0 = 3$ तथा $Y_1 = 4$ हेतु

5. अन्तर समीकरणो के माध्यम से आर्थिक मॉडलों की व्याख्या कीजियें?

15.13 सन्दर्भ ग्रन्थ सूची

1. Dube, G.S., Gupta. D.C., Basic Numerical Anelysis Shalini Prakashan Meerut.

2. Mehta, B.C., Madanani, G.M.K., Mathematics for __Economists, Sultan Chand and Sons.

3. Bhardwaj, R.S. Mathematics for Economics and Business, Excel Books

4. Bose, D., An Introduction to mathematical Economics, Himalaya Publishing House.